

5.3.1 Entwicklungsphasen des Multiplizierens

Erste Phase: Einführung des Vervielfachens Die erste Stufe dieser Phase haben wir bereits zu Beginn von Kapitel 4.3 (S. 54) angesprochen: Gleiche Zahlen werden mehrfach addiert, ohne dass das Kind das Multiplikationszeichen und die damit verbundene multiplikative Ausdrucksweise kennt: $5 + 5 + 5 + 5 = 20$. Damit knüpft man an etwas an, das dem Kind bereits vertraut ist, wobei vor allem der Abakus durch seine einfache Bündelungsregel es ermöglicht, die üblichen Zahlraumgrenzen zu überschreiten, so dass der Prozess der wiederholten Addition so richtig in Schwung kommt.

Daran anschließend wird das Multiplikationszeichen eingeführt, um die additive Schreibweise bei mehreren gleichen Summanden zu verkürzen. Statt $7 + 7 + 7 + 7$ schreiben wir vereinfacht 4×7 und statt $527 + 527 + 527$ schreiben wir 3×527 . Wir notieren insbesondere den Multiplikator grundsätzlich an erster Stelle, weil dies auch unserer mündlichen Ausdrucksweise entspricht. Es geht also hierbei nicht um die Einführung einer neuen Rechenweise, denn die Berechnung erfolgt nach wie vor über die wiederholte Addition.

Zweite Phase: Allgemeine Rationalisierung der wiederholten Addition Das zentrale Thema dieser Phase ist die Erarbeitung des Einmaleins, die nicht in der Form eines sturen Einpaukens voneinander getrennter „Mal-Reihen“ geschehen sollte. Statt dessen gehen wir von einfachen Basissätzen des Einmaleins aus, um uns die schwierigeren Sätze durch geeignete Strategien zu erschließen.

Um multiplikative Terme (z.B. 9×7) nicht über die wiederholte Addition berechnen zu müssen, verkürzen wir das Berechnen z.B. durch das „schnelle“ Verzehnfachen²⁷ (s. S. 54 ff.), durch Verdoppeln, Halbieren und Bilden von Nachbar- und Tauschaufgaben. Z.B.: $9 \times 7 = 10 \times 7 - 7$, $11 \times 7 = 10 \times 7 + 7$ oder $98 \times 7 = 100 \times 7 - 2 \times 7$. Solche Strategien, um das wiederholte Addieren zu rationalisieren, müssen im Unterricht eigens thematisiert und entwickelt werden,

²⁷Wir schließen dabei auch das Multiplizieren mit Potenzen von 10 ein.

wobei vor allem Rechteckmuster die Zusammenhänge anschaulich klären können. Man betreibt dabei tatsächlich Mathematik „vom Feinsten“: Einerseits werden die Strategien miteinander in Verbindung gebracht, andererseits eine Vernetzung der einzelnen multiplikativen Zahlsätze von den Schülern aktiv vorbereitet.

Die bisherige Art und Weise des Verkürzens der wiederholten Addition, wozu auch das Memorieren des Einmaleins gehört, ist bei mehrstelligen Multiplikatoren mitunter äußerst unpraktisch. Z.B. würde man 34×726 nicht über

$$\frac{1}{2} \text{ von } \left(\frac{1}{2} \text{ von } 100 \times 726 \right) + 10 \times 726 - 1 \times 726$$

berechnen. Deshalb werden weitere Strategien des Verkürzens erforderlich.

Dritte Phase: Spezielle Rationalisierung der wiederholten Addition Durch die stellengerechte Zerlegung des Multiplikators gelangt man zu einer speziellen Rationalisierung der wiederholten Addition, die allgemein anwendbar ist. Beispielsweise erfolgt die Berechnung von 34×726 in folgender Form, wobei man die Zahlen auch untereinander schreiben kann.

$$7260 + 7260 + 7260 + 726 + 726 + 726 + 726$$

Das Ergebnis wird durch Aufaddieren der Summanden ermittelt; dabei können die Schüler ihre Einmaleinskenntnisse anwenden.

Vierte Phase: Rationalisierung der Notation im Hinblick auf schriftliche Endformen Um auch die Schreibweise noch weiter zu verkürzen, notieren wir die wiederholt auftretenden (gleichen) Summanden als getrennte multiplikative Terme und berechnen diese wie bisher, um sie anschließend zusammenzufügen. Bei der Aufgabe 34×726 übertragen wir den ausführlichen Term

$$7260 + 7260 + 7260 + 726 + 726 + 726 + 726$$

$$3 \times \begin{array}{r} 1 \\ 7 \ 2 \ 6 \ 0 \\ \hline 2 \ 1 \ 7 \ 8 \ 0 \end{array} \quad 4 \times \begin{array}{r} 1 \ 2 \\ 7 \ 2 \ 6 \\ \hline 2 \ 9 \ 0 \ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ + \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \times 726 \\ \hline 30 \times 726 = 21780 \\ 4 \times 726 = 2904 \\ \hline 1 \\ \hline 24684 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 34 \times 726 \\ \underline{2178} \\ 2904 \\ 1000 \\ \hline 24684 \end{array}$$

1. Das Weglassen der Nullen verfälscht die Teilprodukte und verführt die Schüler zur Nichtbeachtung von Nullen generell.

2. Wenn der Multiplikator rechts notiert wird, so wird bei der Aufgabenstellung von links nach rechts gelesen, bei der Aufgabenberechnung aber – einmaliger Fall – von rechts nach links. Man könnte hier natürlich auf die Kommutativität verweisen, aber das ändert nichts daran, dass für Kinder die Bedeutung der Faktoren unterschiedlich bleibt. Es ist schließlich ein Unterschied, ob man zweimal zum Bäcker geht und je zehn Brötchen holt, oder ob man zehnmal geht und je zwei holt.
3. Die Ausrichtung der Teilprodukte an den Stellen des Multiplikators erschwert wiederum das Verständnis des Multiplizierens als wiederholtes Addieren; denn die Art und Weise, wie das Zehnfache einer Zahl zu bilden ist, richtet sich eben nach dieser Zahl (dem Multiplikanden) und nicht nach dem Multiplikator.
4. Die Einsicht, dass es gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge der Multiplikator „abgearbeitet“ wird, bzw. in welcher Reihenfolge die Teilprodukte angeschrieben werden, wird durch den Zwang zunichte gemacht, mit der höchsten Stelle des Multiplikators zu beginnen.

Es kann kein erstrebenswertes Unterrichtsziel sein, Einsicht und Verständnis durch die Zwangsjacke eines Rasterverfahrens zu verderben. Deutlicher noch als bei der Lehrplan-Endform zeigt sich ein solches Zwangsmuster beim Multiplikationsverfahren auf dem sog. Schachbrett (Multiplikationsabakus) nach MARIA MONTESSORI. Deshalb plädieren wir dafür, auf Vor- oder Endformen dieser Art gänzlich zu verzichten.

Da es beim Übergang zum schriftlichen Multiplizieren (unter Ablösung vom Abakus) vor allem um die dritte und vierte Phase geht, wollen wir diese noch genauer erläutern.

5.3.2 Unterrichtsbeispiele zum Multiplizieren

Nachdem wir im Anschluss an die Addition hauptsächlich *kleinere* Vielfache einer Zahl berechnet haben (z.B. 3×423 , s.S. 54), wollen

wir schließlich auch *größere* Vielfache berechnen (z.B. 134×4765). Aber versetzen Sie sich bitte zunächst einmal in die Situation eines Kindes, das bisher u.U. noch am Abakus gerechnet hat:

$$3 \times 423 = 423 + 423 + 423 = 1269$$

Wie versucht dieses Kind wohl 134×4765 zu berechnen? – Indem es *134-mal* die Zahl 4765 addiert?

$$134 \times 4765 = 4765 + 4765 + 4765 + 4765 + 4765 + 4765 + \dots$$

Weil eine solche Rechnung viel zu zeitaufwendig und fehleranfällig wäre, bedient man sich einer fundamentalen Eigenschaft von Stellenwertsystemen: Das 10-fache einer beliebigen Zahl xyz ist stets $xyz0$: $10 \times 765 = 7650$ (s. Kap. 4.3, S. 54 ff.). Damit lässt sich immerhin schon mal bestimmen, was 34×4765 ist:

$$47650 + 47650 + 47650 \quad + \quad 4765 + 4765 + 4765 + 4765$$

Zur Not könnten wir auch 100×4765 über 10×47650 berechnen, doch davon wollen wir zunächst einmal absehen, da schon die angestrebte Berechnung des 34-fachen einer Zahl für die Kinder nicht ganz einfach ist.

Es ist ein großer Vorteil, wenn Sie schon bei der Erarbeitung des kleinen 1×1 ein wenig über das Zehnfache hinausgehen und auch Aufgaben der Art 12×3 oder 11×7 bearbeiten lassen, weil Ihre Schüler dann schon gewohnt sind, das Zehnfache systematisch bei der Berechnung von Vielfachen zu verwenden: $12 \times 3 = 30 + 3 + 3$, $11 \times 7 = 70 + 7$. Es ist trotzdem keinesfalls trivial für die Kinder, diese Rechenstrategie auch auf Aufgaben wie 34×765 zu übertragen, was der folgende Dialog belegt:

Lehrer: ... und außerdem rechnet ihr als Hausaufgabe aus, was 23×243 ist.

Tobias (Schüler): Ich bin doch nicht blöd und schreibe 23-mal die 243 hin.²⁸ Ich weiß, wie es einfacher geht!

²⁸Im Pfälzer Dialekt klingt das noch viel eindringlicher, und die begleitenden Gesten des Schülers verliehen seiner Rede entsprechenden Nachdruck.

Lehrer: *Ja, Tobias. Wie machst du das?*

Tobias: *Ich rechne $2430 + 2430$ und dann noch dreimal die 243 .*

Für Tobias (und viele andere auch) war es also eine neue Erkenntnis, das Zehnfache einer Zahl mehrmals einzusetzen. Sobald sich diese Erkenntnis aber durchgesetzt hat, bereitet es den Schülern kaum noch Probleme, selbst eine Aufgabe wie 134×4765 in schriftlicher Form zu lösen, wobei der Gedanke an das Abakusrechnen für sie einen Leitfaden bildet. Eine mögliche Form der Notation dieser Rechnung ist in Abb. 36 (S. 92) dargestellt.

$$\begin{array}{r}
 4 7 6 5 0 0 \\
 + 4 7 6 5 0 \\
 + 4 7 6 5 0 \\
 + 4 7 6 5 0 \\
 + 4 7 6 5 \\
 + 4 7 6 5 \\
 + 4 7 6 5 \\
 + 4 7 6 5 \\
 \hline
 2 4 5 4 2 \\
 6 3 8 5 1 0
 \end{array}$$

Abbildung 36: 134×4765

Nach unserer Erfahrung verwenden die Schüler recht verschiedene Notationsformen, z.B. könnte man in der obigen Aufgabe zunächst die Teilprodukte 30×4765 und 4×4765 additiv berechnen und die Ergebnisse anschließend zum Hundertfachen (476500) addieren (s. Abb. 37, S. 93). Es fällt auch positiv auf, dass etliche Schüler ihre Rechenwege den Aufgaben anpassen und nicht stur dieses Verfahren der stellengerechten Zerlegung des Multiplikators anwenden. Beispielsweise erkennen sie, dass es viel geschickter ist, die Aufgabe 51×245 über die Hälfte von 100×245 zu lösen, wie wir es in der Phase der allgemeinen Rationalisierung beschrieben haben. Vergleichen Sie unsere Gegenüberstellung (Abb. 38, S. 93)!

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rcccccc}
 & 4 & 7 & 6 & 5 & 0 \\
 + & 4 & 7 & 6 & 5 & 0 \\
 + & 4 & 7 & 6 & 5 & 0 \\
 & 2 & 1 & 1 & & \\
 \hline
 1 & 4 & 2 & 9 & 5 & 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 & 4 & 7 & 6 & 5 \\
 + & 4 & 7 & 6 & 5 \\
 + & 4 & 7 & 6 & 5 \\
 + & 4 & 7 & 6 & 5 \\
 & 3 & 2 & 2 & \\
 \hline
 1 & 9 & 0 & 6 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 & & 4 & 7 & 6 & 5 & 0 & 0 \\
 + & & 1 & 4 & 2 & 9 & 5 & 0 \\
 + & & & 1 & 9 & 0 & 6 & 0 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
 \hline
 & 6 & 3 & 8 & 5 & 1 & 0 &
 \end{array}$$

Abbildung 37

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rcccc}
 & 2 & 4 & 5 & 0 \\
 + & 2 & 4 & 5 & 0 \\
 + & 2 & 4 & 5 & 0 \\
 + & 2 & 4 & 5 & 0 \\
 + & 2 & 4 & 5 & 0 \\
 & & 2 & 4 & 5 \\
 & 2 & 2 & & \\
 \hline
 1 & 2 & 4 & 9 & 5
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\
 \hline
 & 1 & 2 & 2 & 5 & 0 \\
 + & & & 2 & 4 & 5 \\
 \hline
 & 1 & 2 & 4 & 9 & 5
 \end{array}
 \end{array}$$

Abbildung 38: 51×245

Noch deutlicher wird dies bei der Aufgabe 99×245 ; wir ersparen es uns, die Rechnung über die Addition der Zehnfachen und Einfachen von 245 zu notieren (s. Abb. 39, S. 103). Diese Flexibilität der Kinder wird durch einen Unterricht, der auf irgendein Normalverfahren der Multiplikation ausgerichtet ist, zunichte gemacht.

Es ist nicht zu erwarten, dass *alle* Schüler ihre Rechenwege derart geschickt an die Aufgaben anpassen. Das ist auch nicht unser vorrangiges Ziel. Es sollte aber jeder Schüler fähig sein, eine Aufgabe wie 134×4765 so zu lösen, wie wir dies zu Anfang taten (s. Abb. 36, S. 92). Haben Ihre Schüler diese Fähigkeit erlangt, so können sie schon fast jedes Produkt berechnen, das in der Grundschule vorkommt. Wir halten es deshalb für angemessen, auf diesem Niveau durchaus das ganze dritte Schuljahr zu verharren und zu üben. Wenn Sie den Eindruck haben, dass Ihre Schüler hinreichend gut mit dem Multiplizieren in der Form des wiederholten Addierens umgehen können und auch das kleine 1×1 hinreichend gut beherrschen, dann ist es angebracht, noch die folgende nahe liegende Verkürzung der Schreibweise zu forcieren: Sie notieren den Multiplikanden nur *einmal* und denken dabei, er würde so oft da stehen, wie es der Multiplikator angibt.

Statt:	notieren Sie nur noch:
$ \begin{array}{r} 4 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \\ + \quad 4 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \\ + \quad 4 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \\ + \quad 4 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \\ \quad \quad 3 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 1 \quad 9 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 4 \times \quad 4 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \\ \quad \quad 3 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 1 \quad 9 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \end{array} $

Sie lassen also bis auf einen Summanden alle anderen weg – es sind ja ohnehin immer die gleichen. Das spart Schreibarbeit und damit Zeit. Das Produkt 30×4765 berechnen Sie wie gewohnt über 3×47650 :

$$\begin{array}{r}
 3 \times \quad 4 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 0 \\
 \quad \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\
 \hline
 1 \quad 4 \quad 2 \quad 9 \quad 5 \quad 0
 \end{array}$$

Schließlich werden die beiden Teilprodukte zum Hundertfachen (d.h. 476500) addiert.

So weit geschieht die Verkürzung der schriftlichen Multiplikation in Anlehnung an das Vervielfachen am Abakus, so dass diese Verständnisbasis nicht verlassen wird. Weitere Verkürzungen gehen zwangsläufig zu Lasten dieses Verständnisses, so dass man darauf verzichten sollte.