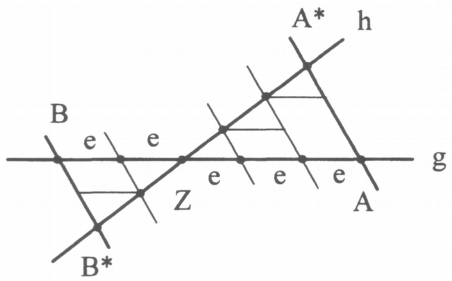
Michael Johann

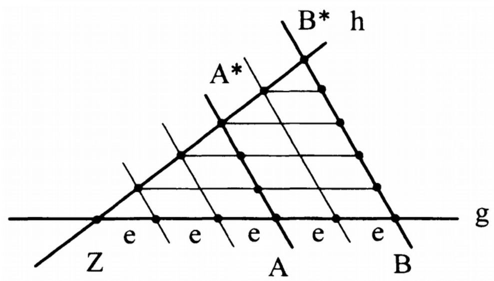
4. Übungsblatt zur Vorlesung Geometrie, WS 2017/18

1) Die von der Schule her bekannte Achsenspiegelung ist eine **Kongruenzabbildung**, da das Spiegelbild einer Figur zu dieser kongruent ist. Wird nacheinander an mehreren Geraden gespiegelt, dann ist die resultierende Figur folglich immer noch kongruent zur Ausgangsfigur. Zeigen Sie:
   a) Spiegelt man nacheinander an zwei Geraden,
      i) die parallelen sind, dann entspricht dies einer Verschiebung der Figur um den doppelten Abstand der beiden Geraden.
      ii) die sich schneiden, dann entspricht diese einer Drehung der Figur um das doppelte des Winkels, den die Geraden bilden; das Drehzentrum ist der Schnittpunkt der Geraden.
   b) Spiegelt man nacheinander an drei Geraden,
      i) die sich in einem Punkt schneiden, dann entspricht dies einer Spiegelung der Figur an einer weiteren Geraden durch den Schnittpunkt der anderen.
      ii) die alle zueinander parallel sind, dann entspricht dies einer Spiegelung der Figur an einer weiteren Geraden, die zu den anderen parallel ist.
      iii) von denen die dritte senkrecht zu den anderen steht, dann entspricht dies einer Verschiebung mit anschließender Spiegelung der Figur, also einer Gleit- oder Schubspiegelung.

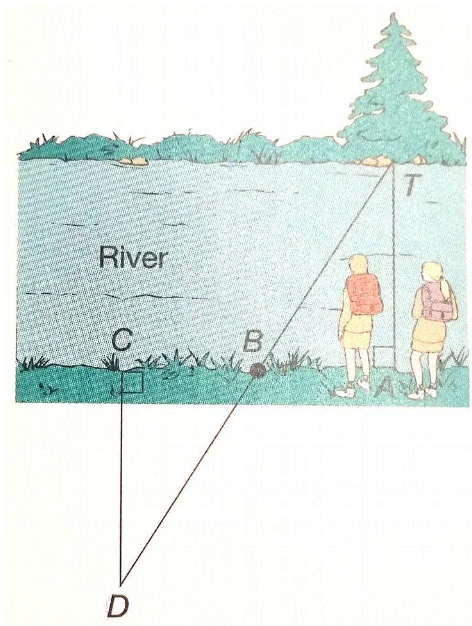
2) Auf der folgenden Seite finden Sie einen Beweis des **Strahlensatzes** bei dem die Parallelen auf derselben Seite bezüglich des Schnittpunkts liegen. Zeigen Sie, dass die Aussage auch zutrifft, wenn die Parallelen auf unterschiedlichen Seiten liegen, dass also auch hier gilt:
   $|ZA| : |ZB| = |ZA^*| : |ZB^*|$



3) Die von ZB^* ausgehenden und zu g parallelen Einheitsstrecken werden so verlängert, dass sie die Strecke BB^* treffen. Welche Strecken sind jeweils gleich lang? Begründen Sie Ihre Antwort. Zeigen Sie, dass
   $|ZA| : |ZB| = |AA^*| : |BB^*|$.



4) Zwei Wanderer, Ken und Betty, stehen an einem Fluss bei Punkt A; direkt gegenüber, auf der anderer Seite des Flusses befindet sich ein Baum (T). Betty geht ein Stück am Flussufer entlang und bleibt bei einem Punkt B stehen. Ken geht ebenfalls zu Punkt B und dann noch einmal so weit bis zu Punkt C. Dort dreht er sich um 90° vom Fluss weg und geht so lange, bis er Betty und den Baum in einer Linie sieht (D).
   a) Bestimmen Sie kongruente Strecken- und Winkelpaare.
   b) Ist $\Delta ABT \cong \Delta CBD$? Warum bzw. warum nicht?
   c) Wie lässt sich so die Breite des Flusses bestimmen?



Strahlensätze

Die Geraden, die durch einen Punkt Z gehen, bilden ein **Geradenbüschel** mit Zentrum Z. g und h seien zwei Geraden eines solchen Büschels. Diese beiden Geraden werden von zwei zueinander parallelen Geraden AA* und BB* geschnitten (Fig. 4.1.1). Wir nehmen zunächst an, dass $\overline{ZA}$ und $\overline{ZB}$ Vielfache einer Einheitsstrecke e sind. Dann gilt mit zwei natürlichen Zahlen m und n für diese Strecken $\overline{ZA} = m \cdot e$ und $\overline{ZB} = n \cdot e$.

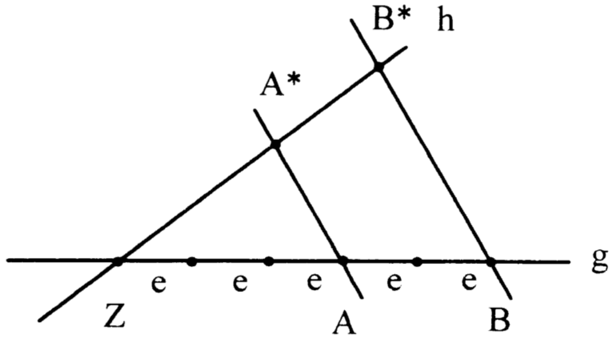


Fig. 4.1.1

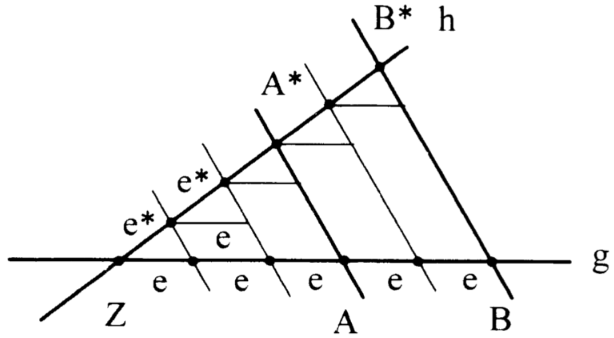


Fig. 4.1.2

In Figur 4.1.1 ist $m = 3$ und $n = 5$. Wir ergänzen die Figur durch Parallelen zu AA* durch die Endpunkte der Einheitsstrecken auf g. In den Schnittpunkten mit ZB* werden parallel zu g Einheitsstrecken abgetragen (Fig. 4.1.2). Nach Kongruenzsatz WSW sind alle an $\overline{ZB^*}$ anliegenden Hilfsdreiecke kongruent. Die Parallelen zu AA* zerlegen damit die Strecke $\overline{ZB^*}$ in n gleich lange Strecken e*. Insgesamt ergeben sich die Streckenverhältnisse:

$$|ZA| : |ZB| = m : n \qquad |ZA^*| : |ZB^*| = m : n$$

und daraus folgt

$$|ZA| : |ZB| = |ZA^*| : |ZB^*|$$