Was können wir über die Dezimalbruchentwicklung von 1/17 sagen, ohne sie konkret zu berechnen?

1. Die Dezimalbruchentwicklung von 1/17 muss unendlich sein!

Wäre das nicht der Fall, dann wäre 1/17 irgendeine endliche Kommazahl also z.B. = $0{,}a_1a_2...a_n$.

Damit wäre $\frac{1}{17} = \frac{a_1a_2...a_n}{10^n}$ und folglich $10^n = 17 \cdot a_1a_2...a_n$ (*). Doch das kann nicht sein, weil einerseits 17 als Primzahl auf beiden Seiten der Gleichung enthalten sein müsste, andererseits aber 10^n nur aus den Primfaktoren 2 und 5 besteht ($10^n = 2^n \cdot 5^n$).

Deshalb muss die Annahme falsch sein, 1/17 sei irgendeine endliche Kommazahl !

2. Die Dezimalbruchentwicklung von 1/17 muss periodisch sein!

Bei der Berechnung von 1/17 durch Verteilen an der Stellentafel bilden wir an jeder Stelle aus den vorhandenen Plättchen 17 Portionen; die restlichen entbündeln wir in die nächst niedrigere Stelle. Als Rest kommt aber jeweils nur eine Anzahl von 1 bis 16 Plättchen infrage, so dass spätestens nach 16 Divisionen ein Rest vorkommen muss, der schon einmal da war. Von da an wiederholen sich die Rechenschritte periodisch.

Insbesondere gilt also:

3. Die Periode der Dezimalbruchentwicklung von 1/17 hat höchstens 16 Stellen!

4. Wenn n die Länge der Periode von 1/17 ist, dann ist 17 ein Teiler von $10^n - 1$!

($10^n - 1 = 99...9$ mit *n* 9en)

1/17 = $0{,}\overline{a_1a_2...a_n}$ → $\frac{1}{17} = \frac{a_1a_2...a_n}{10^n-1}$ → $10^n - 1 = 17 \cdot a_1a_2...a_n$.

$$\begin{array}{rlcl}
 & 10^n \cdot 0{,}\overline{a_1a_2...a_n} & = & a_1a_2...a_n{,}\overline{a_1a_2...a_n} \\
- & 1 \cdot 0{,}\overline{a_1a_2...a_n} & = & 0{,}\overline{a_1a_2...a_n} \\
\hline
 & (10^n-1) \cdot 0{,}\overline{a_1a_2...a_n} & = & a_1a_2...a_n \\
 & \rightarrow 0{,}\overline{a_1a_2...a_n} & = & a_1a_2...a_n \,/\, (10^n-1)
\end{array}$$

(*) $a_1a_2...a_n$ ist die *n*-stellige natürliche Zahl, die im Zehnersystem aus den Ziffern a_1 *bis* a_n besteht, wobei a_1 an der höchsten Stelle steht und a_n an der Einerstelle.