Michael Johann

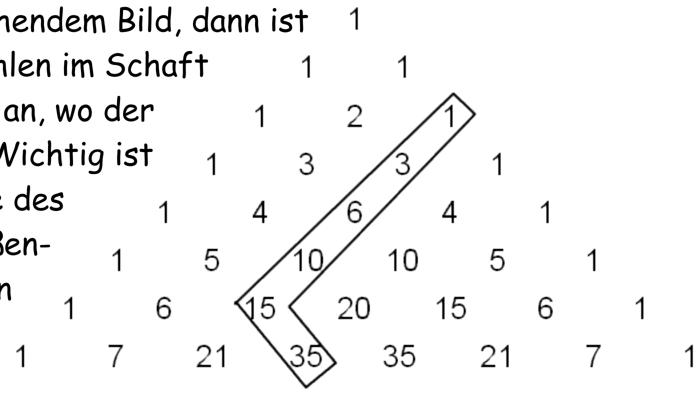
3. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik (Sommer 2016)

1) Bonusaufgabe

Beweisen Sie die Gleichung $(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ durch vollständige Induktion.
Tipp: Wenden Sie die 1. binomische Formel auf $[(1 + 2 + \ldots + n) + (n+1)]^2$ an.
(S.a.: http://www.schulabakus.de/Arithmetik/nat_Zahlen_Math.html#deltaquadrat)

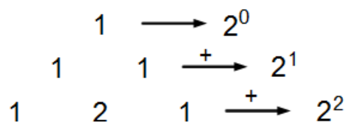
2) Bonusaufgabe:

Fasst man Zahlen im Pascal'schen Dreieck so zusammen, dass die Kontur an einen Eishockeyschläger erinnert, wie in nebenstehendem Bild, dann ist die Zahl in der Kelle (35) die Summe der Zahlen im Schaft (1+3+6+10+15). Dabei kommt es nicht darauf an, wo der Eishockeyschläger liegt und wie lang er ist. Wichtig ist nur, dass der Schaft bis zu einer Außenseite des Dreiecks reicht und parallel zur anderen Außenseite ist; außerdem muss die Kelle nach unten gerichtet sein und darf nur eine Zahl beinhalten.



Beweisen Sie diese Regel durch vollständige Induktion! (Tipp: Die Zahlen im Schaft seien $s_1,\ldots,s_n$ und die Zahl in der Kelle sei k.)

3) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Im Pascalschen Dreieck ist die Summe aller Zahlen einer Zeile gleich 2^n. (n ist die Nummer der Zeile, wobei die Spitze des Dreiecks die Nummer 0 hat.) Tipp: Bezeichnen Sie die Zahlen der Zeile n mit $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$.

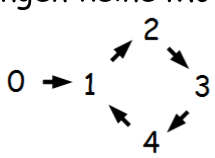


4) Bonusaufgabe

a) Begründen Sie, weshalb folgende Mengen keine Modelle der Dedekind-Peano-Axiome sind:

i) $\{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$
(d.h. $\infty \in \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$)

ii)



b) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Dedekind-Peano-Axiome an der Menge {0, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...} (das sind die Primzahlen sowie die Zahlen 0 und 1}.