Michael Johann

# 5. Aufgabenblatt zur Vorlesung Arithmetik (Sommer 2015)

1) ***Bonusaufgabe***

Setzen Sie in die Lücken passende Ausdrücke oder Symbole ein:

Ist $M$ eine unendliche Menge, dann existiert keine ........................ Abbildung $f: M \to P(M)$ (s. Satz von Cantor).

Beweis: Zu einer Abbildung $f: M \to P(M)$ betrachten wir folgende Teilmenge $A$ von $M$:

- $A = \{m \in M \mid m \;......\; f(m)\} \subseteq M$

  (Elemente, die nicht in der Teilmenge enthalten sind, auf die sie abgebildet werden)

Angenommen, es gäbe ein $a$ in $M$, das auf diese Menge $A$ abgebildet wird: $f(a) \;......\; A$.

Dann stellt sich die Frage, ob $a$ in $A$ enthalten ist oder nicht.

- Ist $a \in A$, dann gilt nach der Definition der Menge $A$: $a \;......\; f(a)$. Aber weil $f(a) \;......\; A$ ist, ist das widersprüchlich.
- Ist hingegen $a \notin A$, dann gilt wegen $f(a) \;......\; A$ auch $a \;......\; f(a)$. Damit erfüllt $a$ jedoch die Definitionsbedingung der Menge $A$ und ist darin enthalten, was ebenfalls widersprüchlich ist.

Deshalb kann es ein solches Element $a$, das auf $A$ abgebildet wird, nicht geben, und $f$ ist somit nicht ........................ .

2) **Bonusaufgabe**

Mit der gleichen Idee wie beim 2. Cantorschen Diagonalverfahren lässt sich zeigen, dass die Menge aller Teilmengen der natürlichen Zahlen (die Potenzmenge P(ℕ)) nicht abzählbar ist.

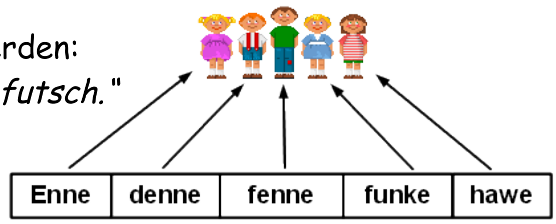
Bsp.: Beginnt eine Liste von Teilmengen mit: A={1,3,5,7,...}, B={2,4,6,8,...}, C={1,4,7,10,...}, D={2,5,8,11,...}, etc., dann notiert man die einzelnen Mengen in einer Tabelle mit der Überschrift ℕ als Folgen z.B. von Häkchen („ist Element") und Strichen („ist nicht Element") :

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | |
| ℕ: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | ... |
| A: | ✓ | — | ✓ | — | ✓ | — | ✓ | — | ✓ | — | ✓ | ... |
| B: | — | ✓ | — | ✓ | — | ✓ | — | — | — | ✓ | — | ... |
| C: | ✓ | — | — | ✓ | — | — | ✓ | — | — | ✓ | — | ... |
| D: | — | ✓ | — | — | ✓ | — | — | ✓ | — | — | ✓ | ... |
| ... | | | | | | | | | | | | |

Ermitteln Sie daraus so wie beim Cantorschen Verfahren die ersten Elemente einer Teilmenge, die nicht in der Liste vorkommt, und begründen Sie Ihr Vorgehen.

3) **Bonusaufgabe**

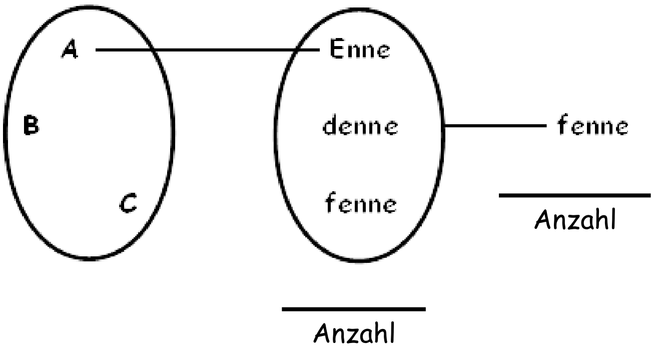
Der folgende Abzählreim soll zum Zählen verwendet werden:
*„Enne, denne, fenne, funke, hawe, schnawe, niko, demo, futsch."*




a) Überprüfen Sie die Erfüllbarkeit der Zählprinzipien.
(Nehmen Sie an, der Reim sei der Anfang der Zahlwortreihe aus einer fremden Sprache und ließe sich beliebig weit fortsetzen.)

b) Auf welcher Niveaustufe der Zählfähigkeit nach Fuson ordnen Sie sich hier selbst ein?

c) Setzen Sie in die Lücken passende Ausdrücke ein und vervollständigen Sie die Grafik:
*Wenn der obige Abzählreim benutzt wird, um die Anzahl der Elemente von {A, B, C} zu bestimmen, dann wird zunächst ____________________ zwischen dieser Menge und einem Anfangsabschnitt des Reims hergestellt. Dieser Abschnitt ist somit als ________ Anzahl der Elemente von {A, B, C} verwendbar.*
*Steht darüber hinaus das zuletzt genannte Reimwort als ___________ für den ganzen Anfangsabschnitt, dann ist es als ________ Anzahl der Elemente von {A, B, C} verwendbar.*




4) Ordnen Sie die folgenden Zahlen entsprechend ihrer Verwendung einem Zahlaspekt zu:

a) Es ist 12 Uhr.
b) Schlag Seite 25 auf.
c) Wir haben 17°C.
d) Bitte 2× läuten.
e) Der Zug hat 5 Minuten Verspätung.
f) Auf dem Zahlenstrahl 3 Einheiten rechts von 7.
g) Es geschah 2 Tage vor dem 1. April.