

2. Aufgabenblatt zur Vorlesung „Arithmetik“ (Sommer 2013)

1) Ist Q_n die n -te Quadratzahl ($= n^2$) und Δ_n die n -te Dreieckszahl ($= 1+2+\dots+n$), dann gilt

$$Q_n = n + 2\Delta_{n-1} \quad \text{und} \quad Q_n = \Delta_n + \Delta_{n-1}$$

Begründen Sie diese Zusammenhänge an Punktmustern.

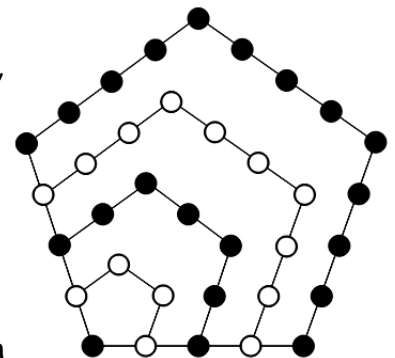
2) Finden Sie eine Formel für die Summe $1 + 2 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 2 + 1$ und begründen Sie diese Formel an Punktmustern.

3) Das Produkt $13 \cdot 17$ lässt sich berechnen, indem man das Produkt der beiden Nachbarzehner ($20 \cdot 10$) und das Produkt der Einer ($3 \cdot 7$) addiert: $13 \cdot 17 = 20 \cdot 10 + 3 \cdot 7$. Verwenden Sie ein Rechteck aus $13 \cdot 17$ Punkten (o.Ä.), um diesen Rechenweg zu begründen (so wie das 3. binom. Gesetz in der Vorlesung), und formulieren Sie eine allgemeine Rechenregel zu diesem Rechenbeispiel.

4) Bonusaufgabe

a) Pentagonalzahlen erhält man analog zur Folge der Quadratzahlen durch sukzessives Anfügen von Winkelhagen derart, dass immer größere Fünfeckmuster entstehen. Ist P_n die n -te Pentagonalzahl ($P_1 = 1, P_2 = 5, P_3 = 12, \dots$), dann gilt: $P_n = n + 3\Delta_{n-1}$

Begründen Sie diese Formel an nebenstehendem Punktmuster.



b) Ebenso wie Quadratzahlen oder Pentagonalzahlen werden auch Sechseckszahlen (Hexagonalzahlen), 7-Eckszahlen usw. gebildet. Man nennt sie allgemein Polygonalzahlen. Die Idee der Zerlegung in Dreieckszahlen (wie bei den Pentagonalzahlen) ist auch bei ihnen anwendbar, und man kann so zeigen, dass sich die n -te k -Eckszahl wie folgt berechnen lässt:

$$\frac{1}{2}n(n-1)(k-2) + n.$$

(Die erste n -Eckszahl, $=1$, besteht aus nur einem Punkt, dem ersten Eckpunkt. Die zweite k -Eckszahl, $=k$, wird aus dem ersten, „echten“ k -Eck gebildet.)

5) Bonusaufgabe

Berechnen Sie die Summe $301 + 308 + 315 + \dots + 399$.

Allgemein: Berechnen Sie die Summe $a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + (a + nb)$.

6) Berechnen Sie die unendlichen Summen

a) $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots$

b) $1/5 + 1/25 + 1/125 + \dots$