11. Anwendungen von Teilbarkeitsregeln im Zehnersystem

11.1. Zunächst ein **Trick** zum Gedankenlesen:

Überlegen Sie sich eine 3stellige Zahl. Es sollten nicht alle Ziffern gleich sein. Dann bilden Sie durch Vertauschen der Ziffern dieser Zahl eine weitere 3stellige Zahl. Nun subtrahieren Sie die kleinere von der größeren Zahl. Im Ergebnis streichen Sie eine Ziffer ungleich 0. Nennen Sie nun die beiden Ziffern, die übrig geblieben sind (sie können evtl. auch 0 sein).

Warum kann man aus diesen 2 Ziffern schließen, welche Ziffer gestrichen wurde?

Probieren Sie mehrere solche Subtraktionsaufgaben und vergleichen Sie die Ergebnisse. Was haben alle so erhaltenen Ergebnisse gemeinsam?

11.2. Die Neunerprobe

Früher wurde in der Schule eine Methode gelehrt, mit der man lange Rechnungen kontrollieren konnte: die sogenannte Neunerprobe. Das ging so:

Man findet den Neunerrest einer Zahl, indem man ihre Ziffern addiert. Ist das Ergebnis größer als 9, so addiert man die Ziffern wieder - so lange, bis nur mehr eine einstellige Zahl übrig bleibt.

Beispiel: Der Neunerrest von 2375 ist 8, denn 2 + 3 + 5 + 7 = 17, 1 + 7 = 8.

Man kann sich dabei Rechenarbeit ersparen, indem man 9er oder Ziffern, die zusammen 9 ergeben, gleich weglässt:
Neunerrest von 1932 (9 weggelassen): 1 + 3 + 2 = 6
Neunerrest von 365 (3 + 6 = 9 weggelassen): 5

Wenn man jetzt eine lange Addition kontrollieren will, addiert man einfach die Neunerreste der Summanden. Das Ergebnis muss gleich dem Neunerrest der Summe sein:

```
   2375
   1932
+   365
 ------
   4672
```

Neunerprobe: 8 + 6 + 5 = 19, Neunerrest **1**
Neunerrest von 4672: 4 + 6 = 10, 1 + 0 = **1**

Das funktioniert auch bei Multiplikationen:

```
2375•365
------------
  7125
  14250
    11875
```

866875

Neunerprobe: $8 \cdot 5 = 40$, Neunerrest **4**
Neunerrest von 866875: $8 + 6 + 6 + 8 + 7 + 5 = 40$, $4 + 0 =$ **4**

Die Neunerprobe garantiert nicht, dass die Aufgabe richtig ist. Aber wenn die Neunerprobe nicht passt, dann muss irgendwo ein Fehler sein. Hat man irgendwo eine Null vergessen oder 2 Ziffern vertauscht, so würde dies bei der Neunerprobe nicht auffallen.

Warum funktioniert die Neunerprobe?

Sei $a = 9 \cdot n + r$ und $b = 9 \cdot m + s$, mit $0 \leq r, s < 9$, so gilt: $a + b = 9 \cdot (n+m) + r + s$, also ist der Neunerrest des Ergebnisses entweder $r+s$ oder $r+s - 9$, wenn $r+s$ größer 9 sein sollte. Jedenfalls lässt sich der Neunerrest von $a+b$ aus den Neunerresten von a und b ermitteln (und diese bekommt man durch Quersummenbildung).

Ähnliches gilt bei der Multiplikation: $a \cdot b = 81 \cdot n \cdot m + 9 \cdot r + 9 \cdot s + r \cdot s$, also ist der Neunerrest von $a \cdot b$ wiederum der gleiche wie der von $r \cdot s$.

11.3. Prüfzifferberechnung

vgl. http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/pruefziffern.htm

Auf den meisten Verpackungen von Waren befinden sich heute Strichcodes und zugehörige Code-Nummern (siehe Abbildung rechts). Anhand dieses Codes kann eine Ware sowohl an der Kasse des Kaufhauses als auch im internationalen Handel eindeutig identifiziert werden. Meist ist es, wie in der Abbildung, ein Code nach dem sogenannten **EAN**-13-System (**E**uropäische **A**rtikel-**N**umerierung mit 13 Ziffern).

Bei Büchern ist ein ähnlicher Code schon seit Jahrzehnten üblich. An den zusätzlich durch Bindestriche gegliederten ISBN-Nummern erkennt man zudem Sprache, Verlag und Verlagsnummer eines Druckerzeugnisses (**I**nternationale **S**tandard-**B**uch**n**ummer). Übrigens besitzen Bücher meist auch einen EAN-Code, in dem die ISBN-Nummer enthalten ist: Den ersten 9 Ziffern der ISBN-Nummer werden die drei Kennzahlen 978 vorangestellt.

Es ist einleuchtend, dass man etwa bei Übermittlungen einer Bestellung oder beim Einlesen der Artikelnummer über den Scanner einer Ladenkasse auf absolute Exaktheit bei der Übertragung der Nummern achten muss. Eine gewisse Möglichkeit zur Kontrolle bietet die sogenannte Prüfziffer — es ist bei beiden Systemen jeweils die letzte Ziffer der Nummern. Sie berechnet sich nach einfachen Regeln (siehe unten) aus den übrigen Ziffern. Wenn sich nach einer Übermittlung oder der Codeeingabe durch Scannen oder Eintippen an einer Kaufhauskasse diese Zahl nicht aus den übrigen ergibt, so muss ein Fehler vorliegen.

Eine absolute Sicherheit bietet die Prüfziffer jedoch natürlich nicht. Denn bei den 12 relevanten Ziffern der EAN-Nummern gibt es theoretisch 999.999.999.999 verschiedene Möglichkeiten — demgegenüber jedoch nur 10 verschiedene Prüfziffern.

ISBN-Nummern

Die Prüfziffer (zehnte Ziffer) der ISBN-Nummer berechnet sich wie folgt:
Man multipliziere die erste Ziffer mit eins, die zweite mit zwei, die dritte mit drei und so fort bis zur neunten Ziffer, die mit neun multipliziert wird.
Man addiere die Produkte und teile die Summe ganzzahlig mit Rest durch 11. Der Divisionsrest ist die Prüfziffer. Falls der Rest 10 beträgt, ist die Prüf-"ziffer" ein "X".

1. Beispiel: **ISBN 3-499-13599-[?]** (Fräulein Smillas Gespür für Schnee)
$3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 9 \cdot 8 + 9 \cdot 9 =$
$3 + 8 + 27 + 36 + 5 + 18 + 35 + 72 + 81 = 285$
285:11 = 25 Rest 10, also Prüfziffer: X

2. Beispiel: **ISBN 3-446-19313-[?]** (Fermats letzter Satz)
$3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 9 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 8 + 3 \cdot 9 =$
$3 + 8 + 12 + 24 + 5 + 54 + 21 + 8 + 27 = 162$
162:11 = 14 Rest 8, also Prüfziffer: 8

3. Beispiel: **ISBN 0-7475-5100-[?]** (Harry Potter and the Order of the Phoenix)
$0 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 9 = 14 + 12 + 28 + 25 + 30 + 7 = 116$
116:11 = 10 Rest 6, also Prüfziffer: 6

4. Beispiel: **ISBN 1-57231-422-[?]** (Hardcore Visual Basic)
$1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 =$
$1 + 10 + 21 + 8 + 15 + 6 + 28 + 16 + 18 = 123$
123:11 = 11 Rest 2, also Prüfziffer: 2

Man kann die Prüfung, ob eine 10 stellige Zahlenfolge eine ISBN ist, auch so vornehmen, dass man die erste Zahl • 10 rechnet, die zweite •9 usw. und die Prüfziffer noch einfach dazufügt. Es muss sich eine durch 11 teilbare Zahl ergeben.

Im 4. Beispiel: $1 \cdot 10 + 5 \cdot 9 + 7 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 = 176$.

Es führt zur gleichen Prüfziffer, ob man nach dem zuerst beschriebenen Verfahren den Rest bei der Division durch 11 berechnet, oder beim 2. Ansatz den letzten Summanden so bestimmt, dass eine durch 11 teilbare Summe entsteht.

Ich überlasse es an dieser Stelle Ihnen, darüber nachzudenken, warum beide Rechnungen zum gleichen Ergebnis führen müssen.

EAN-Nummern (Strichcodes)

Die Prüfziffer der EAN-Nummern (13. Ziffer) berechnet sich, indem man die ersten zwölf Ziffern abwechselnd mit 1 und 3 multipliziert (links mit 1 anfangen) und diese Produkte summiert. Die Prüfziffer ist die Differenz der Summe zum nächsten Vielfachen von 10. Falls die Summe durch 10 teilbar ist, ist die Prüfziffer die 0.

1. Beispiel: **978381582086[?]**
$9 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 3$

$= 9 + 21 + 8 + 9 + 8 + 3 + 5 + 24 + 2 + 0 + 8 + 18 = 115$
115 + **5** = 120, also Prüfziffer: 5

2. Beispiel: 978382731710[?]
$9 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3$
$= 9 + 21 + 8 + 9 + 8 + 6 + 7 + 9 + 1 + 21 + 1 + 0 = 100$
100 ist durch 10 teilbar, also Prüfziffer: 0

3.Beispiel: 400330101839[?]
$4 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 9 \cdot 3$
$= 4 + 0 + 0 + 9 + 3 + 0 + 1 + 0 + 1 + 24 + 3 + 27 = 72$
72 + **8** = 80, also Prüfziffer: 8