

[→ Inhaltsverzeichnis](#)

Grundlegende Rechenverfahren

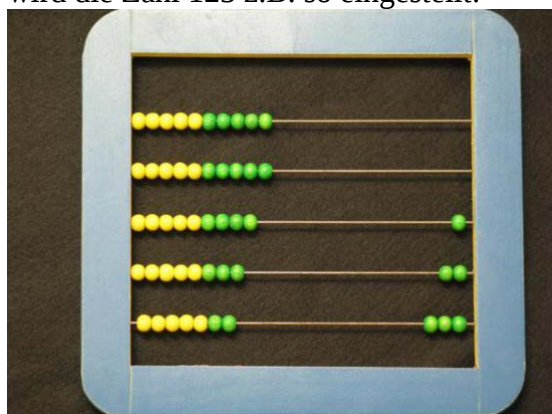
Addieren am Rechenrahmen



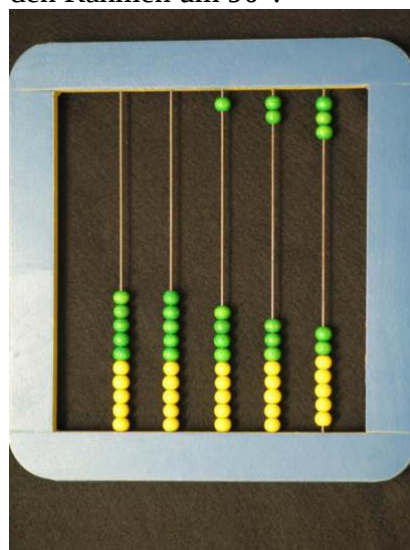
Der sog. Rechenrahmen mit 10×10 Perlen ist dem russischen Abakus (Stschoty) nachempfunden. Während der russische Abakus jedoch für alltägliche Rechnungen im Stellenwertsystem tatsächlich verwendet wurde/wird, benutzt man den Rechenrahmen bei uns i.Allg. nur zur Veranschaulichung in Klasse 1 und 2 der Grundschule im Zahlbereich bis 100 und insbesondere nicht im Sinne eines Stellenwertsystems.



Bei der Verwendung des Rechenrahmens als Abakus – also im Stellenwertsystem – wird die Zahl 123 z.B. so eingestellt:



Zur Anpassung an unsere Zahlenschreibweise drehen wir den Rahmen um 90° :



Die Rechnung $123+48$ kann wie folgt durchgeführt

werden: 

Um 8 Einer addieren zu können, werden zunächst alle 7 Perlen aus dem Vorrat verwendet. Dann wird gebündelt, und anschließend wird noch 1 Einer hinzugefügt. Zur Addition der 4 Zehner schiebt man 4 Kugeln nach oben.

Eleganter geht es

aber so: 
Statt 8 Einer

umständlich zu addieren fügt man bei diesem Vorgehen 1 Zehner hinzu und nimmt 2 Einer weg. Die Addition der 4 Zehner erfolgt wie gehabt.

(Siehe dazu auch „Wechselspiele“:
)

Vertiefungsaufgabe:

Die Subtraktion zweier Zahlen im Zehnersystem kann fast gänzlich durch eine Addition berechnet werden. Dazu bildet man zunächst das sog. *Komplement* des Subtrahenden und addiert es zum Minuenden. Dabei ist das Komplement einer n -stellige Zahl a der Unterschied zur ebenfalls n -stelligen Zahl 999...9.
Beispiel: Das Komplement von 87 ist 12 (= 99 – 87). Zur Berechnung von $235 - 87 (=148)$ addiert man zunächst 235 und 12 (=247); und von diesem Zwischenergebnis subtrahiert man 100 und addiert 1:

$$235 - 87 = (235 + 12) - 100 + 1$$

Allgemein: Ist a eine n -stellige Zahl und $C(a)$ ihr Komplement, dann gilt

$$b - a = (b + C(a)) - 10^n + 1.$$

Begründen Sie diese Rechenstrategie.

Das Ergänzungsverfahren

Das Ergänzen ist eine Form des Addierens, bei der zwar nur einer der beiden Summanden gegeben ist aber dafür auch die Summe. Bsp: $178 + \underline{\hspace{1cm}} = 295$. Eingestellt wird am Abakus 178; die Zielzahl 295 legen wir mit Ziffernkärtchen darüber. Dann beginnen wir zu addieren:

$$178 + \underline{\hspace{1cm}} = 295$$


(Am Rechenrahmen)


(Am Schulabakus)

Es ist schon paradox, dass die Anzahl der Einer (8) durch Hinzufügen kleiner (5) werden soll. Herkömmlich löst man dieses Problem z.B. durch Auffüllen der Einer auf zehn und anschließendes Bündeln – wie in den Videoclips gezeigt.

Am Schulabakus bietet sich eine weitere Möglichkeit an:
Hier werden die gewünschten 5 Einer separiert und was übrig ist durch Auffüllen und Bündeln in einem Schritt beseitigt.



Verdoppeln und halbieren

Kleine Vielfache einer Zahl können durch wiederholte Addition berechnet werden:

Z.B. im 8er-System die Aufgabe $2 \times 407 = ?$



Oder im 6×10er-System die Aufgabe $3 \times 1;47;58 = ?$



(Ziehen Sie mit der Maus über die Aufgabe)

Übungsaufgabe:

Berechnen Sie im 16er-System $4 \times 356 =$

Scherzfrage: *Warum war bei den Römern die Hälfte von zwölf gleich sieben?*
 (→ [Antwort](#))

Weder bei der römischen noch bei unserer Zahlschrift kann man eine Zahl halbieren, indem man die Ziffern halbiert.

Am Schulabakus hingegen geht das durchaus. Die Hälfte von 4362_8 z.B. berechnet man so: 

Übungsaufgabe:

Halbieren Sie $1;43;52$ (im 6×10er-System).

Ergebnis: $\frac{1}{2}$ von $1;43;52 =$

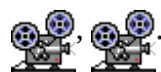
(Ziehen Sie mit der Maus über die Aufgabe)

... am Rechenrahmen

Von besonderem Reiz ist das Verdoppeln und Halbieren am Rechenrahmen. Denn speziell an diesem Gerät kommt diesen beiden Rechenoperationen eine gewisse Eigenständigkeit gegenüber anderen Operationen des Vervielfachens und Teilens zu – wie wir gleich sehen werden (s.a. „Wechselspiele“, , ).

Zum „Forschen“:

Verdoppeln Sie am Rechenrahmen zunächst 123  und dann 246



Das Verdoppeln von 123 ist eine Trivialität. Bei 246 werden wir zwar mit dem Problem der Stellenüberschreitung konfrontiert, aber das ist uns von der Addition her schon bekannt, und wir kennen dafür mehr oder minder geschickte Strategien zur Lösung.

Während des Verdoppelns von 246 kann jedoch der Eindruck entstehen, dass bei den Zehnern nicht 4 sondern 5 zu verdoppeln sind, da die Verdopplung der 6 Einer zu einer weiteren Perle bei den Zehnern geführt hat. Das gilt natürlich nicht nur bei dieser Aufgabe sondern allgemein: Wenn wir eine Zahl am Rechenrahmen einstellen, und verdoppeln sie wie gezeigt, dann verändern wir beim Bündeln an einer Stelle auch die Stelle, die als nächstes zu verdoppeln ist.

Das muss nicht sein!



Zum „Weiterforschen“: Verdoppeln Sie die Zahlen 734 sowie 861 am Rechenrahmen, indem Sie jeweils mit der höchsten Stelle beginnen. , . Fällt Ihnen dabei etwas auf?

Wenn wir z.B. 7 verdoppeln, dann schieben wir letztlich so viele Kugeln zurück in den Vorrat, wie dort schon liegen

nämlich 3. Und weil dieses Prinzip allgemein beim Verdoppeln von 5, 6, 7, 8 und 9 gilt, kann man sich viel Kopfrechnen beim Verdoppeln am Rechenrahmen sparen und diese Operation weitestgehend mechanisieren:

Sind weniger als 5 Kugeln an einem Draht eingestellt, dann füge ich genau so viele hinzu. Sind es aber 5 oder mehr, dann nehme ich so viele weg, wie im Vorrat liegen, und füge an der nächst höheren Stelle eine Kugel hinzu.

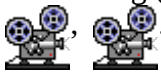
Damit haben wir ein eigenständiges Verfahren zum Verdoppeln von Zahlen am Rechenrahmen oder Stschoty entdeckt – oder wiederentdeckt. Denn es ist wohl anzunehmen, dass frühere Rechenmeister dieses Verfahren kannten.

Es sei an dieser Stelle aber ausdrücklich darauf hingewiesen, dass das mechanisierende Rechnen für uns kein allgemein erstrebenswerter Inhalt des Mathematikunterrichts ist – wir freuen uns lediglich darüber, erkannt zu haben, dass es hier möglich ist.

Betrachten wir uns nun das Halbieren am Rechenrahmen.

Zum „Forschen“:

Halbieren Sie zunächst eine Zahl ohne und dann eine mit Stellenüberschreitung (z.B. 246 und 146).



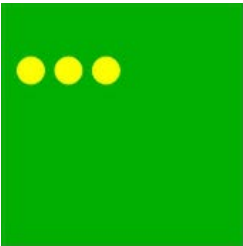
Das Halbieren ohne Stellenüberschreitung ist ebenso trivial wie die entsprechende Rechnung beim Verdoppeln. Bei Zahlen, die eine Stellenüberschreitung erfordern (mit ungeraden Ziffern), sehen wir schnell ein, dass es weitaus geschickter ist, mit den Einern zu beginnen, anstatt mit der höchsten Stelle, *also umgekehrt wie wir es vom schriftlichen Divisionsverfahren her gewohnt sind.*

Die Subtraktion

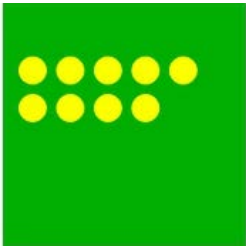


Wenn wir die Summe 268+123 (=391) bilden, indem wir zunächst 268 am Abakus legen, dann 123 und anschließend bündeln, dann können wir auch versuchen 123 vom eben erhaltenen Ergebnis 391 wieder wegzunehmen (391–123).

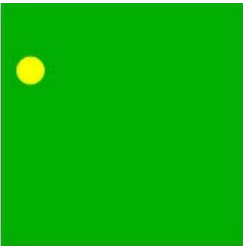
391 – 123



1 wegnehmen
(trivial)



2 wegnehmen
(trivial)



3 wegnehmen
(?)

Um aus dem rechten Feld 1 Plättchen wegnehmen zu können, entbündeln wir einen Zehner – wir machen sozusagen die Bündelung rückgängig, die wir vorhin bei der Addition 268+123=391 vorgenommen hatten.



Übungsaufgabe: Berechnen Sie

- a. im 16er-System: $563 - 345$ 
- b. im 8er-System: $563 - 345$ 
- c. im 2er-System: $1001 - 11$ 
- d. am Rechenrahmen: $391 - 123 = 268$. A)  B) 

Bemerkung zu d): Wie bei der Addition gibt es auch bei der Subtraktion am Rechenrahmen zwei Strategien zur Stellenüberschreitung (hier an der Einerstelle, minus 3).

- Variante A: minus 1, dann entbündeln, und dann noch minus 2.
- Variante B: minus 10, plus 7.

Die Multiplikation mit 10

Vielfache einer beliebigen Zahl n berechnen wir bislang, indem wir n so oft addieren, wie es in der Aufgabenstellung verlangt ist:

2-mal n : $n + n$,

3-mal n : $n + n + n$,

...

Aber wer wollte auf diese Art etwa berechnen, wie viele Tage 100 Jahre sind?

Die Möglichkeit, das 10-fache einer Zahl durch die übliche Veränderung an den Ziffern zu bestimmen, ist für Kinder überraschend, weil es entsprechend einfache Regeln für andere Vielfache wie z.B. das 11-fache oder das 9-fache **nicht** gibt. (Man könnte bei der Multiplikation mit 11 z.B. erwarten, dass eine „1“ angehängt wird.)



Kinder, die das 10-fache von Zahlen anfangs noch durch wiederholten Addition am Schulabakus bestimmen, erkennen recht schnell folgende Regel zur Verkürzung des Verfahrens:

Am Schulabakus erhält man das 10-fache einer Zahl, indem man diese Zahl um eine Stelle nach links verschiebt.

Wie lässt sich die Gültigkeit dieser Regel auf andere Stellenwertsysteme ausweiten? Suchen Sie nach geeigneten Beispielen.



$$10_2 \times 101_2$$



$$10_8 \times 123_8$$

Am Schulabakus erhält man in jedem Stellenwertsystem das 10-fache einer Zahl, indem man diese Zahl um eine Stelle nach links verschiebt.

Dabei ist 10 selbst als Zahl dieses Systems anzusehen: 10_b (b gibt die Bündelgröße des Systems an).

Mit der Kenntnis des 10-fachen einer Zahl n im Zehnersystem können wir uns weitere Vielfache dieser Zahl erschließen, z.B.

→ das 11-fache: $10 \times n + n$, (Distributiv-Gesetz)

- das 9-fache: $10 \times n - n$, (Distributiv-Gesetz)
- das 5-fache: $10 \times n : 2$.

Der Nutzen gegenüber der wiederholten Addition liegt klar auf der Hand: Z.B. muss man zur Berechnung des 11-fachen nicht elf Additionen ausführen sondern nur noch eine einzige.

Wie sind diese Rechenstrategien nun auf andere Stellenwertsystem zu übertragen? Betrachten wir dazu die Zahl 123 im **8er-System**:

- $11 \times 123 = 10 \times 123 + 123$ ([→ Rechnung](#))
 - $7 \times 123 = 10 \times 123 - 123$ ([→ Rechnung](#))
 - $4 \times 123 = 10 \times 123 / 2$ ([→ Rechnung](#))
-

Multiplizieren mit 1×1-Tabelle

Mit den bisher kennengelernten Rechenverfahren (Addition, Subtraktion, Verdoppeln, Halbieren, Verzehnfachen) kann man eigentlich schon alle schulrelevanten Aufgaben zur Multiplikation natürlicher Zahlen berechnen (wobei wir auch die Kenntnis des 100-fachen, 1000-fachen usw. voraussetzen). Um z.B. 8×95 (im Zehnersystem) zu berechnen, könnte ein Schüler jeden der im Folgenden skizzierten Rechenwege verwenden:

8×95

- $10 \times 95 - 2 \times 95$
- $10 \times 95 - 95 - 95$
- $8 \times 100 - 8 \times 5$
- $8 \times 90 + 8 \times 5$
- $2 \times (2 \times (2 \times 95)))$

Ebenso lassen sich in fremden Stellenwertsystemen Rechenwege finden:

6×457
(im 8er-System)

- $10 \times 457 - 2 \times 457$
- $4570 - 457 - 457$
- $2 \times 457 + 2 \times 457 + 2 \times 457$

und damit:

65×457
(im 8er-System)

- $60 \times 457 + 5 \times 457$
- $6 \times 4570 + 6 \times 457 - 457$

Oftmals sind solche Rechenwege aber recht langwierig und bringen keine Vorteile gegenüber der wiederholten Addition. Im Gegenteil: Bei Kenntnis des 1×1 lässt sich die wiederholte Addition sogar schneller durchführen. Betrachten wir dazu die Aufgabe 7×685 im Zehnersystem.

7×685

[\(⇒ Das Gleiche als pdf-Datei\)](#)

Wollen wir in einem fremden Stellenwertsystem ähnlich effizient rechnen, so müssen wir uns zunächst die entsprechende 1×1-Tabelle bereitstellen. Im 8er-System z.B. sieht sie wie folgt aus:

<u>1×1-Tabelle im Achtersystem</u>							
1	2	3	4	5	6	7	10
2	4	6	10	12	14	16	20
3	6	11	14	17	22	25	30
4	10	14	20	24	30	34	40
5	12	17	24	31	36	43	50
6	14	22	30	36	44	52	60
7	16	25	34	43	52	61	70
10	20	30	40	50	60	70	100

Damit können wir z.B. $6_8 \times 573_8$ ebenso berechnen, wie wir das im Zehnersystem gewohnt sind. Von der 1×1-Tabelle brauchen wir dazu nur die 6er-Reihe.

6×573 im 8er-System

[\(⇒ Präsentation als pdf-Datei\)](#)

Zur Berechnung eines Produkts mit mehrstelligem Multiplikator, wenden wir die Multiplikation mit 10 (bzw. 100, 1000 usw.) an. Um etwa $64_8 \times 573_8$ zu berechnen, kommt als neuer Schritt nur die Berechnung von $60_8 \times 573_8$ hinzu. Der Rest der Aufgabe läuft wie gehabt:

$$64_8 \times 573_8 = 60_8 \times 573_8 + 4_8 \times 573_8 = 10_8 \times (6_8 \times 573_8) + 4_8 \times 573_8$$

mit $6_8 \times 573_8 = 4342_8$ (siehe oben) und $4_8 \times 573_8 = 2754_8$ (selbst nachrechnen!) folgt:

$$64_8 \times 573_8 = 10_8 \times 4342_8 + 2754_8 = 43420_8 + 2754_8 = 46374_8$$

Durch kompaktere Schreibweisen gelangt man von diesen Gedanken ausgehend zu ähnlichen Verfahren wie dem üblichen Schulverfahren (siehe Wechselspiele ).

Nachfolgend ein Vorschlag von uns zur Schreibweise bei fremden Stellenwertsystemen:

$$64_8 \times 573_8$$

[\(⇒ Präsentation als pdf-Datei\)](#)

Es geht uns aber auch hier nicht darum, möglichst kompakte und schnell zu notierende Verfahren zu entwickeln. Wir wollen bei allen Rechnungen stets deren Begründung im Auge behalten, was sich ab einem gewissen Grad der Automatisierung nicht mehr gewährleisten lässt.

Didaktischer Aufbau des kleinen „1+1“ und „1×1“

Zum Öffnen der pdf-Datei bitte hier klicken: [→ „Rechnen mit Kopf und Händen.“](#)

Dividieren

Aufteilen in Einzelportionen:

In einer Tüte Gummibärchen sind 120 Stück drin. Peter isst jeden Tag 13 Stück davon. Wie lange hält die Tüte?

Versetzen wir uns in ein Kind der zweiten Klasse, das nicht dividieren oder multiplizieren kann aber immerhin addieren und subtrahieren. Die Idee zur Lösung der Aufgabe besteht darin, auszurechnen wie viele Gummibärchen nach dem ersten Tag noch vorhanden sind, und nach dem zweiten Tag usw.

$$120 - 13 = 107$$

$$107 - 13 = 94$$

$$94 - 13 = 81$$

$$81 - 13 = 68$$

$$68 - 13 = 55$$

$$55 - 13 = 42$$

$$42 - 13 = 29$$

$$29 - 13 = 16$$

$$16 - 13 = 3$$

⇒ Peter kann 9-mal 13 Gummibärchen aus der Tüte nehmen und es bleiben dann noch 3 Stück übrig. Die Tüte hält somit 9 Tage.

Das notieren wir so: $120 \div 13 = 9 \text{ Rest } 3$ und verwenden das Divisionszeichen mit dem Minus, um unseren Rechenweg anzudeuten.

Das Divisionszeichen $\div$ wurde wohl erstmals von J.C.V. Hoffmann im 19. Jh. vorgeschlagen, um eine Division im Sinne des Aufteilens zu kennzeichnen (*Ein wiederholter Vorschlag zur Beseitigung einer bedauerlichen Verwirrung in der niederen Arithmetik betr. das „Dividieren“*, Zeitschr. für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 1891, 22. Jahrg., S. 179-181).

Aufteilen nennt man einen Vorgang, bei dem von einer gegebenen Menge der Größe a so lange Portionen der Größe b weggenommen werden, bis der Rest r der Menge kleiner ist als b . Man schreibt dann: $a = n \times b + r$ oder $a \div b = n \text{ Rest } r$.

$$3 \div 2 = 4 \div 3 ?$$

Im Sinne der obigen Definition ist diese Aussage richtig! Denn beide Divisionen ergeben „1 Rest 1“. Wegen des offensichtlichen Widerspruchs zur entsprechenden Bruchgleichung wurde vielfach der Versuch unternommen, die Division mit Rest anders zu schreiben. Das Problem ist jedoch nicht die Schreibweise des Ergebnisses, sondern die Tatsache, dass die Division mit Rest nicht die gleiche Rechenoperation ist wie die Division von rationalen Zahlen (Brüchen). Im ersten Fall besteht das Ergebnis nämlich aus *zwei natürlichen Zahlen* (Quotient und Rest) und im zweiten aus *einer rationalen Zahl* ($1,5 \neq 1 \text{ Rest } 1 \neq 1,33\dots$). Unterrichtspraktisch kommt der vermeintliche Widerspruch ohnehin nicht vor, da u.E. die meisten Schüler die Division von rationalen Zahlen als eine Präzisierung oder Weiterentwicklung der Division mit Rest auffassen.

Übungsaufgabe:

Berechnen Sie im 8er-System (durch wiederholte Subtraktion): $100_8 \div 12_8 = ?$ [→ Lösung](#)

... in Mehrfachportionen:

Zurück zu den Gummibärchen:

Schneller geht die Aufgabe zu lösen, wenn man etwa zwei Portionen auf einmal subtrahiert:

„Zu Anfang sind es 120 Gummibärchen. Nach zwei Tagen sind es noch $120 - 26 = 94$ Stück. Nach weiteren zwei Tagen sind es noch $94 - 26 = 68$ usw.“

Und nichts hindert uns daran, beliebige Vielfache der Portionsgröße zu subtrahieren – sofern wir sie leicht berechnen können:

$$\begin{array}{rcl} 120 - 26 = 94 & (2\times) & \text{Hinter jeder Subtraktion notieren wir, welches} \\ 94 - 39 = 55 & (3\times) & \text{Vielfache der Portionsgröße subtrahiert wurde,} \\ 55 - 52 = 3 & (4\times) & \text{und erhalten wiederum: } 120 \div 13 = 9 \text{ Rest } 3. \\ & \mathbf{9\times} & \end{array}$$

Solche Rechnungen ($120 \div 13$) können Kinder im zweiten Schuljahr an Abakus/Stellentafel ausführen!

Übungsaufgabe:

Berechnen Sie im 8er-System durch wiederholte Subtraktion – aber diesmal unter Verwendung von Vielfachen des Divisors: $100_8 \div 12_8 = ?$ → [Lösung](#)

... in 10fach-Portionen:

Der letzte große Schritt zur Berechnung beliebiger Divisionsaufgaben besteht in der Verwendung des 10-fachen des Divisors (sowie des 100-fachen ...). Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{1200 \div 13 = ?} & & \\ 1200 - 130 = 1070 & (10\times) & \\ 1070 - 390 = 680 & (30\times) & \\ 680 - 520 = 160 & (40\times) & \\ 160 - 130 = 30 & (10\times) & \\ 30 - 26 = 4 & (2\times) & \\ & \mathbf{92\times} & \end{array}$$

$$\Rightarrow 1200 \div 13 = 92 \text{ Rest } 4$$

Nach diesem Schema können Schüler alle in der Schule vorkommenden Divisionsaufgaben berechnen und dabei je nach ihren individuellen Rechenfertigkeiten mehr oder minder geschickt vorgehen.

Übungsaufgabe:

Berechnen Sie im 8er-System: $1234_8 \div 14_8 = ?$ → [Lösung](#)

Um zur üblichen Notationsform der Division zu gelangen,

... notiert man zum einen die Subtraktionen untereinander:

$$\begin{array}{rcl} 1200 \div 13 = & & \\ - \underline{130} & (10\times) & \\ 1070 & & \\ - \underline{390} & (30\times) & \\ 680 & & \\ - \underline{520} & (40\times) & \\ 160 & & \\ - \underline{130} & (10\times) & \end{array}$$

... und subtrahiert zum anderen möglichst große Vielfache:

$$\begin{array}{rcl} 1200 \div 13 = & & \\ - \underline{1170} & (90\times) & \\ 30 & & \\ - \underline{26} & (2\times) & \\ 4 & 92\times & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ - 26 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (2 \times) \\ \hline 92 \times \end{array}$$

$$\Rightarrow 1200 \div 13 = 92 \text{ Rest } 4$$

Verteilen

Eine spezielle Form des Verteilens haben wir mit dem Halbieren schon unabhängig von der Division kennen gelernt. Und die zugrunde liegende Handlungsweise lässt sich natürlich auf andere Divisoren verallgemeinern (dritteln, vierteln, ...).

Verteilen nennt man einen Vorgang, bei dem eine Menge der Größe a in eine vorgegebene Anzahl von n gleichgroßen Portionen und ggf. einen Rest zerlegt wird, der nicht in n Portionen zerlegbar ist. Man schreibt dann: $a = n \times b + r$ oder $a / n = b \text{ Rest } r$.

Bemerkung:

Den Schrägstrich / verwenden wir, wenn die Division im Sinne des Verteilens gedacht ist, so wie wir das Zeichen $\div$ zur Betonung des Aufteilens verwenden. Mathematisch gesehen besteht kein Unterschied zwischen diesen beiden Versionen der Division und man verwendet deshalb i.Allg. nur ein Zeichen.

Während das Aufteilen in naheliegender Weise verschriftlicht werden kann, ist das beim Verteilen mitunter gar nicht möglich. Versuchen Sie doch $123 / 13$ schriftlich zu rechnen: $1 / 13$ geht nicht, $12 / 13$ geht auch nicht – aber wie dann? Man bedient sich in solchen Fällen des Aufteilens, $123 \div 13$. Deshalb ist es sinnvoll, im Unterricht das Aufteilen vor dem Verteilen zu behandeln.

Warum führen Aufteilen und Verteilen zum gleichen Ergebnis? Stellen Sie sich vor, Sie verteilen Gummibärchen aus einer großen Tüte an Ihre Schüler. Um die Handlungsweise des Verteilens zu betonen, gehen Sie mit der Tüte reihum und geben jedem Schüler genau eins. Sobald Sie jedem eins gegeben haben, beginnen Sie wieder von vorne. Diesen Vorgang wiederholen Sie so lange, bis nichts mehr übrig ist. Aber oh weh! Mitten in einer solchen Verteilrunde geht Ihnen der Vorrat aus. Ein Teil der Klasse hat schon ein weiteres Gummibärchen erhalten, ein andere Teil aber noch nicht. Eine peinliche Situation ist das. Die bereits verteilten Gummibärchen kann man nicht mehr zurückholen – etliche sind schon verzehrt –, und weitere haben Sie nicht. Das hätte jedoch nicht passieren müssen! Sie brauchen dafür auch nicht die ganze Tüte vorab auszuzählen. Sie hätten nur prüfen müssen, ob für jeden Schüler noch ein Gummibärchen vorhanden ist, *ehe* Sie eine Verteilrunde starteten. Indem Sie nun Runde um Runde zuerst eine Portion Gummibärchen – eins pro Schüler – aus der Tüte nehmen, ehe Sie diese verteilen, kommt eine neue Frage auf: Wie viele solche Portionen können Sie aus dem Gesamtbestand bilden? Es ist bemerkenswert, dass aus dem ursprünglichen Verteilen (a / n , d.h. Zerlegen einer Menge der Größe a in eine vorgegebene Anzahl von n gleichgroßen Portionen) ein Aufteilen geworden ist ($a \div n$, d.h. Zerlegen einer Menge der Größe a in Portionen der Größe n). Und wie viele Portionen sind es? Genau so viele wie jeder Schüler Gummibärchen erhält! Denn von jeder Portion erhält jeder Schüler genau eins.

Sie können die obige Frage auch algebraisch angehen: [→ hier](#)

Durch Verteilen können wir z.B. die Aufgabe $123 / 3$ lösen, indem wir die Zahl 123 am Abakus legen und anschließend daraus drei gleich große Zahlen herstellen. 

Übungsaufgabe:

Wie lautet die Lösung von $123 / 3$ im 16er-System? Was ist $1;23 / 3$ im 6×10 er-System?



Mit etwas Routine löst man sich schnell von der konkreten Handlung am Abakus – denkt sich diese nur noch – und führt die Rechnung mithilfe schriftlicher Notizen etwa so aus:

7081 / 5

(⇒ Präsentation als pdf-Datei)

Übungsaufgabe:

Berechnen Sie so oder so ähnlich im 16er-System: $7081_{16} / 5$ → Lösung

Um den Schreibaufwand zu reduzieren, notieren wir den Quotienten nur einmal. Also schreiben wir (wieder im Zehnersystem) statt:

1 4 1 6

1 4 1 6

1 4 1 6

1 4 1 6

1 4 1 6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

6

1

4

1

<

Übungsaufgabe:

Berechnen Sie so oder so ähnlich im gewohnten Zehnersystem: $1234 / 7$. [→ Lösung](#)

Obgleich dieses Verfahren durch seine kompakte Notation überzeugt, verlangt es vom Schüler sehr viel Kopfarbeit. Wir wollen uns deshalb eine Variante überlegen, die den Kopf ein wenig entlastet.

$$1234 / 7$$

[\(⇒ Präsentation als pdf-Datei\)](#)

Verteilen eines Restes am Abakus

Das Verteilen am Abakus ermöglicht eine einfache Herstellung von Kommazahlen (Fachausdruck: Systembrüche)! Dazu wird der herkömmliche Schulabakus um einige Felder nach rechts erweitert. Damit man nachher noch weiß, wo das erste Feld war, legt man rechts davon einen Gegenstand als Markierung. Das Video zeigt in diesem Sinne die Rechnung $53 / 4$.



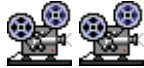
In anderen Stellenwertsystemen ist lediglich die jeweilige Bündelungsregel anders. Die Division z.B. von $1 / 4$ läuft wie folgt:

$$1 / 4 \text{ im } 6 \times 10\text{-er-System}$$

[\(⇒ Präsentation als pdf-Datei\)](#)

Übungsaufgabe:

Berechnen Sie $1/4$ im 8er-System und im 16er-System.



Auch unendliche periodische Kommazahlen (Systembrüche) lassen sich am Schulabakus leicht einführen. Das Video zeigt die Berechnung von $1/3$ im 8er-System.



Übungsaufgabe:

Berechnen Sie im 6×10 er-System $1/7$.

Ergebnis: $1/7 =$

(Ziehen Sie mit der Maus über die Aufgabe)

Zur Berechnung von Aufgaben des Typs $1/n$ bietet sich in Anlehnung an die Handlungen an der Stellentafel folgende Notation an (hier am Beispiel $1/7$ im Zehnersystem):

$1/7 = 0 \text{ Rest } 1$
 $10/7 = 1 \text{ Rest } 3$
 $30/7 = 4 \text{ Rest } 2$
 $20/7 = 2 \text{ Rest } 6$
 $60/7 = 8 \text{ Rest } 4$
 $40/7 = 5 \text{ Rest } 5$
 $50/7 = 7 \text{ Rest } 1$
 $10/7 = \dots$

 $\Rightarrow 1/7 = 0, 142857 \dots$

$1/2 = 0,5$	$1/10 = 0,1$
$1/3 = 0,3$	$1/11 = 0,09$
$1/4 = 0,25$	$1/12 = 0,083$
$1/5 = 0,2$	$1/13 = 0,0769230$
$1/6 = 0,16$	$1/14 = 0,0714285$
$1/7 = 0,142857$	$1/15 = 0,06$
$1/8 = 0,125$	$1/16 = 0,0625$
$1/9 = 0,1$	$\dots$

Wie lauten die entsprechenden Systembrüche in anderen Stellenwertsystemen?

Aufgrund des obigen Rechenverfahrens können wir feststellen:

Die Division zweier natürlicher Zahlen führt entweder zu einem endlichen Systembruch oder zu einem unendlichen, der aber periodisch ist.

Denn die Reste bei der Division durch n sind kleiner als n . Deshalb kommt nach spätestens n Divisionsschritten im obigen Verfahren ein Rest vor, der schon einmal da war. Ab dann wiederholen sich alle Reste in der gleichen Reihenfolge.
Nur wenn der Rest 0 vorkommt bricht das obige Verfahren ab, und der Systembruch ist endlich.

Periodische Systembrüche

Wie lautet die Aufgabe zum Ergebnis?

Wir sind bisher von Divisionsaufgaben ausgegangen und haben daraus „Kommazahlen“ berechnet. Aber wie findet man zu einer vorgegebenen Kommazahl eine zugehörige Aufgabe?
Betrachten wir die Situation im Zehnersystem. Wenn keine Periode vorliegt wie z.B. bei 0,75, dann bietet es sich an, die Zahl mit einer entsprechenden Potenz von 10 zu multiplizieren, um auf die Aussage zu kommen: $0,75 \cdot 100 = 75$. Daraus folgt dann $75/100 = 0,75$.
Also entsteht ein endlicher Systembruch allgemein durch die Division einer Zahl durch 10^k . Ein solcher Divisionsterm kann dann ggf. noch gekürzt werden, aber der Divisor (Nenner) kann nur die Primteiler 2 oder 5 haben.

Eine endlicher Systembruch entsteht bei der Division durch eine Zahl n genau dann, wenn die Primteiler von n Teiler der Basis des Stellenwertsystems sind.

Ist nämlich n eine solche Zahl (im Zehnersystem z.B. ein Produkt von 2en und 5en), dann lässt sich der Term $1/n$ immer so erweitern, dass im Nenner eine Potenz von 10 steht, so dass der entsprechende Systembruch endlich ist.

Aber dieses Verfahren der Zuordnung eines Systembruchs zu einer Division funktioniert *nicht* bei periodischen Kommazahlen! Es bedarf dazu noch eines kleinen Tricks: Z.B. ist $100 \cdot 0,75757575... = 75,757575....$ Und daraus folgt

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & 100 \cdot 0,\overline{75} = 75,\overline{75} \\ \text{(II)} \quad & 1 \cdot 0,\overline{75} = 0,\overline{75} \\ \hline \text{(I-II)} \quad & 99 \cdot 0,\overline{75} = 75 \\ \Rightarrow \quad & 0,\overline{75} = 75/99 \end{aligned}$$

Allgemein:

Ist $0,\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1}$ ein periodischer Systembruch, dann gilt:

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 / (10^n - 1) = 0,\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1}$$

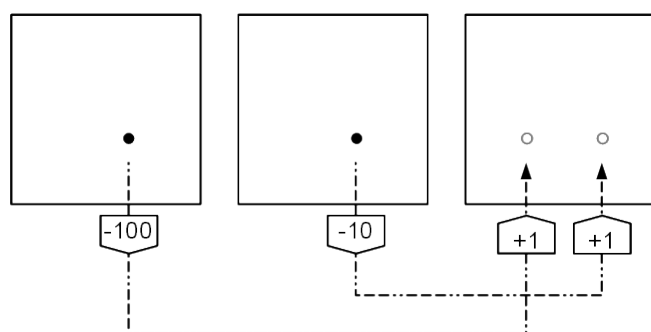
(Im Zehnersystem ist $10^n - 1 = 999 \dots 99$ mit n 9en.)

Gilt das Interesse nur der Länge der Periode und nicht den einzelnen Ziffern, dann können wir zu deren Berechnung den eben formulierten Gedanken nutzen: Ist n eine Zahl deren Primteiler keine Teiler der Basis sind, dann ist der Systembruch zu $1/n$ periodisch und somit das Ergebnis einer Division $a/(10^k - 1)$, d.h. $1/n = a/(10^k - 1)$. Also muss es eine Zahl a geben, sodass $n \cdot a = 10^k - 1$ ist – und k ist dann die Länge der Periode. Also muss man eine (kleinste) Zahl k finden, so dass n ein Teiler von $10^k - 1$ ist.

- [Die Primfaktorzerlegung von \$10^n - 1\$ \(Zehner- und Achtersystem\)](#)
- [„Was können wir über die Dezimalbruchentwicklung von \$1/17\$ sagen, ohne sie konkret zu berechnen?“](#)

Quersummenregeln

Eine Zahl ist genau dann restlos durch 9 (bzw. 3) teilbar (d.h. sie ist ein Vielfaches von 9 bzw. 3), wenn ihre Quersumme durch 9 (bzw. 3) teilbar ist.



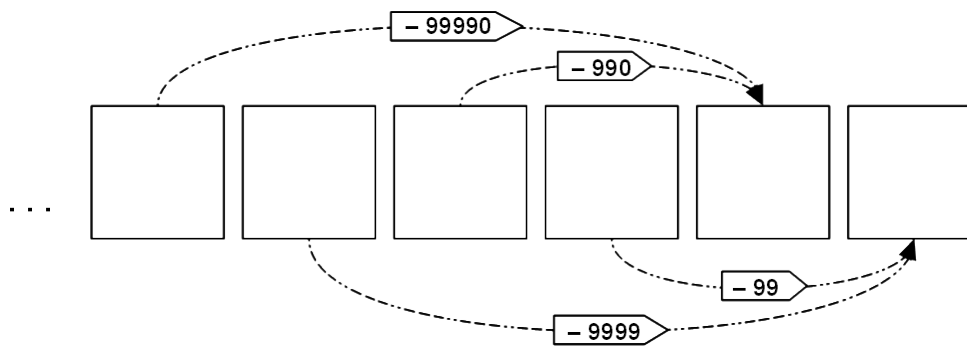
Um die **Quersumme** einer Zahl n zu bilden, die am Abakus liegt, legt man alle Plättchen ins erste Feld. Bezogen auf einzelne Plättchen entspricht dies im Zehnersystem den Rechenoperation $-10+1 (= -9)$, $-100+1 (= -99)$ etc. Also wird bei der Quersummenbildung ein Vielfaches von 9 subtrahiert. Subtrahiert man schließlich auch von dieser Quersumme ein möglichst großes Vielfaches von 9, dann hat man insgesamt nur Vielfache von 9 subtrahiert und was übrig bleibt, ist der Rest der Ausgangszahl n bei Division durch 9.

(Siehe auch: [⇒ „Schnittpunkt 6“, S.31](#))

Übungsaufgabe:

1. Formulieren und begründen Sie die entsprechende Quersummenregel im 8er-System.
2. Beim Bilden der Quersumme der Zahl 1230 im Zehnersystem, $Q(1230)=6$, subtrahiert man $1 \cdot 999 (=9 \cdot 111)$, $2 \cdot 99 (=9 \cdot 22)$ und $3 \cdot 9$. Also gilt $1230 = 9 \cdot 111 + 9 \cdot 22 + 9 \cdot 3 + 6$, und damit ist $1230 \div 9 = (111+22+3) \text{ Rest } 6$. Formulieren und begründen Sie eine entsprechende Aussage für die Zahlen 1230 und 111 111 im 8er-System.

Um eine Zahl im Zehnersystem auf Teilbarkeit durch 11 zu testen, bildet man die **alternierende Quersumme**: Alle Plättchen, an ungeraden Stellen (1. Stelle, 3. Stelle, ...) werden ins erste Feld gelegt. Das entspricht den Subtraktionen $-99 (= -11 \cdot 9)$, $-9999 (= -11 \cdot 909)$, Alle Plättchen an geraden Stellen (2. Stelle, 4. Stelle, ...) kommen ins 2. Feld, was den Subtraktionen $-990 (= -11 \cdot 90)$, $-99990 (= -11 \cdot 9090)$, ... entspricht. Schließlich wird die Differenz zwischen der Anzahl der Plättchen im 1. und im 2. Feld gebildet. Man nimmt also aus dem



1. und 2. Feld gleichviele Plättchen heraus, bis eines dieser beiden Felder leer ist – d.h. man subtrahiert ein möglichst großes Vielfaches von 11. Subtrahiert man schließlich auch von dieser alternierenden Quersumme ein möglichst großes Vielfaches von 11, dann hat man insgesamt nur Vielfache von 11 subtrahiert und was übrig bleibt, ist der Rest der Ausgangszahl n bei Division durch 11.

Übungsaufgabe:

Formulieren und begründen Sie eine entsprechende alternierende Quersummenregel im 8er-System?

Der Grundgedanke bei der Quersummenbildung findet überraschenderweise eine Anwendung bei folgender Zahlenspielerei (aus: [„PIK AS, TU-Dortmund“](#)):

UMKEHRZAHLEN - Startaufgabe



PIKO sagt:

Wenn du bei einer Zahl ihre Ziffern vertauschst, erhältst du ihre UMKEHRZAHL.
Die Umkehrzahl von 85 ist dann 58.



- Wähle nun selbst eine zweistellige Zahl. Schreibe ihre Umkehrzahl dazu.
Ziehe die kleinere von der größeren Zahl ab.
Rechne mindestens 12 weitere Aufgaben. Beispiel: $85 - 58 = \underline{\quad}$
- Was fällt dir (bei den Ergebnissen) auf? Beschreibe das in deinem Heft.

Legt man z.B. die Zahl 34 am Abakus, dann fällt auf, dass es gar nicht nötig ist, alle Plättchen im 1. und 2. Feld zu vertauschen, wie man allein von den Ziffern her meinen könnte ($3 \leftrightarrow 4$). Es genügt hier das Umlegen eines einzigen Plättchens, wie [→ dieser Grafik](#) zu entnehmen ist. So erklärt sich, weshalb die Differenz zweistelliger Umkehrzahlen eine 9er-Zahl sein muss. Ähnlich lassen sich die Differenzen von [→ ANNA-Zahlen](#) erklären (z.B. 2112–1221).

Links zu Umkehr/Spiegel-Zahlen und ANNA-Zahlen:

- [„Umkehrzahlen“ \(PIK AS\)](#)
- [ebenfalls „Umkehrzahlen“ \(PIK AS\)](#)
- [ANNA-Zahlen \(Powerpoint-Datei\)](#)
- [„Wir forschen zu ANNA-Zahlen“](#)

Übungsaufgabe:

Welche Differenzen ergeben ANNA-Zahlen im 16er-System?

Auf der Quersummenregel und der alternierenden Quersummenregel beruhen die [→ 9er- und 11er-Probe](#), die dazu dien(t)en, Rechenfehler bei den Grundrechenarten zu erkennen.

Siehe dazu:

- [„Rechnen ohne Computer – 9er- und 11er-Probe“](#)
 - [9er-Probe für \$4431336 \div 13\$](#)
 - [Anwendung der Teilbarkeitsregeln](#)
-

[→ Inhaltsverzeichnis](#)