

[→ Inhaltsverzeichnis](#)

Stellenwertsysteme

Warum/wozu *fremde* Stellenwertsysteme in der Lehrerbildung?

- Nicht, weil sie im Mathematikunterricht der Grundschule vorkämen!
(Sie kommen dort nicht mehr vor; aber ein wenig noch im 5. Schuljahr.)
- Nicht, weil manchen Stellenwertsystemen eine gewisse Bedeutung im IT-Bereich zukommt!
(Siehe Rechner unter Windows.)
- Auch nicht, um Studenten zu ärgern!
- *Sondern, um uns zum Nachdenken über unsere Gewohnheiten beim Rechnen anzuregen und dadurch das allgemeine Prinzip von Stellenwertsystemen zu klären!*

Die Grundregel

- So oder so ähnlich bündeln wir gewöhnlich im Zehnersystem: 

(s.a: Wechselspiele, „[Die Bündelungsregel](#)“)

- So bündeln wir im 8er-System: 

- ... und so im 2er-System: 

- ... und so im 16er-System: 

Etwas exotisch wirkt dagegen das 6×10 er-System, weil hier abwechselnd Zehner- und Sechserbündel gebildet werden. Der folgende Filmclip setzt mitten in einem Bündelungsvorgang ein. Wir dürfen annehmen, dass das Bündeln schon so weit fortgeschritten ist, dass die ersten vier Felder mit 5, 9, 6 und 12 Plättchen (von links nach rechts) belegt sind. Dann wird so weitergebündelt:



Übungsaufgabe: Legen Sie 28 Plättchen ins erste Abakusfeld (rechts außen !) und bündeln Sie a) nach der 2er-Regel, b) nach der 8er-Regel, c) nach der 16er-Regel und d) nach der 6×10 er-Regel.

[→ Lösung](#)

Bei der Notation des Ergebnisses von c) stoßen wir auf ein kleines Problem: Im ersten Abakusfeld liegen zwölf Plättchen. Und wenn wir das Ergebnis einfach als 1 12 notieren, so ist das missverständlich. Deshalb verwendet man z.B. Klammern: 1 (12), oder man verwendet statt der Ausdrücke (10)...(15) die Buchstaben A...F, womit das Ergebnis 1 C lautet.

Im 6×10 er-System (d) ist das Ergebnis einfach 2 8. In diesem System ist es üblich, zwischen Stellen, an denen

Sechserbündel gebildet werden, einen Doppelpunkt oder einen Strichpunkt zu setzen. Damit kann man als Ergebnis von d) z.B. auch schreiben: $0\ 0 : 0\ 0 : 2\ 8$. – Und schon sieht das 6×10 er-System nicht mehr ganz so „exotisch“ aus!

Auch Kinder sehen das Bündeln am Abakus zunächst ohne Beziehung zu den vertrauten Ziffernzahlen (so wie wir im Fall des „exotisch“ 6×10 er-Systems). Wie man die Erkenntnis für diesen Zusammenhang bei ihnen fördern kann, zeigt der Videoclip:



„Unsere 10“ ?

Im Alltag verwenden wir das Ziffern paar „10“ synonym zum Zahlwort „zehn“. Wenn wir jedoch fremde Stellenwertsysteme betrachten, müssen wir dabei etwas vorsichtiger sein.

Scherz: *Es gibt 10 Typen von Menschen, nämlich solche, die das Dual-System kennen und solche, die es nicht kennen!*

Denn wenn wir zwei Steinchen ins erste Feld am Abakus legen und nach der 2er-Regel bündeln, so ist das Ergebnis just 10 – gelesen „eins-null“ – aber nicht „zehn“!

Also ist „10“ im 2er-System synonym zu „zwei“!

Zu welchen Zahlwörtern ist „10“ im 8er- bzw. 16er-System dann wohl synonym? – Klar: zu „acht“ bzw. zu „sechzehn“.

Um diese Vieldeutigkeit von Ziffernzahlen zu beseitigen, notiert man bei fremden Stellenwertsystemen das Bündelmaß als Index: 10_2 , 10_8 , 10_{16} . Dabei stehen die Indizes selbst im Zehnersystem, und eine Zahl im Zehnersystem wird stets ohne Index notiert.

Übungsaufgabe:

Vervollständigen Sie: $10_2 = \underline{\hspace{1cm}}$, $10_8 = \underline{\hspace{1cm}}$, $10_{16} = \underline{\hspace{1cm}}$.

Legen Sie zehn Steinchen ins erste Feld am Abakus und bündeln Sie a) nach der 2er-Regel, b) nach der 8er-Regel und c) nach der 16er-Regel.

a) $10 = \underline{\hspace{1cm}}_2$, b) $10 = \underline{\hspace{1cm}}_8$, c) $10 = \underline{\hspace{1cm}}_{16}$.

[→Lösung](#)

Fremde Zahlensysteme „übersetzen“

Wir können die Zahlen fremder Stellenwertsysteme wie Wörter fremder Sprachen betrachten. Das Zehnersystem hat in dieser Analogie die Rolle der Muttersprache.

Von einigen muttersprachlichen Wörtern wie 2, 8, 10 und 16 kennen wir auch schon bedeutungsgleiche Wörter in manchen Fremdsprachen:

$$2 = 10_2, \quad 8 = 10_8, \quad 10 = 1010_2, \quad 10 = A_{16}, \quad 16 = 10_{16}.$$

Mit Hilfe des Bündelns am Abakus können wir auf einfache Weise einen Ausdruck der Muttersprache in einen gleichbedeutenden fremdsprachlichen Ausdruck übersetzen. Wollen wir z.B. „67“ ins 8er-System übersetzen, dann legen wir 67 Steinchen ins erste Abakusfeld und bündeln nach der 8er-Regel:



Um einen fremdsprachlichen Ausdruck in einen muttersprachlichen zurück zu übersetzen, können wir die Handlung des Bündelns umkehren, als würden wir einen Film rückwärts laufen lassen. So gelangen wir z.B. von der Zahl 103_8 wieder zu 67 Steinchen im ersten Abakusfeld:



Übungsaufgabe:

Übersetzen Sie am Abakus:

$11 = \underline{\hspace{1cm}}_2$,	$21 = \underline{\hspace{1cm}}_8$,	$31 = \underline{\hspace{1cm}}_{16}$
$1111_2 = \underline{\hspace{1cm}}$,	$33_8 = \underline{\hspace{1cm}}$,	$1101_2 = \underline{\hspace{1cm}}_{16}$

[→Lösung](#)

Aus den Handlungen am Abakus lassen sich die bekannten schriftlichen Verfahren zur Übersetzung von Zahlen direkt ableiten.

So hatten wir bei der Übersetzung von „67“ ins 8er-System 67 Steinchen ins erste Feld gelegt und dann gebündelt:

67 :
8 =
8
Rest
3

Wir konnten 8 Steinchen ins zweite Feld legen, 3 blieben im ersten übrig. Dann bündelten wir im zweiten Feld:

8 :
8 =
1
Rest
0

Wir konnten 1 Steinchen ins dritte Feld legen, im zweiten blieb keines zurück. Im dritten Feld ergaben sich

[\(⇒ Präsentation als pdf-Datei\)](#)

keine Bündel
mehr:

1 :
8 =
0
Rest
1

Ergebnis: 103₈.

Bei der Übersetzung von 103₈ ins Zehnersystem hatten wir diese Zahl stellengerecht am Abakus gelegt und dann im höchsten, dritten Feld mit dem Entbündeln begonnen:

$$\begin{array}{r} 1 \cdot \\ 8 \\ + \\ 0 \\ = \\ 8 \end{array}$$

Durch Entbündeln kommen 8 Steinchen im zweite Feld dazu. Weil dort zuvor keine waren, bleibt es bei 8. Diese Steinchen werden weiter entbündelt ins erste Feld:

$$\begin{array}{r} 8 \cdot \\ 8 \\ + \\ 3 \\ = \\ 67 \end{array}$$

Zu den 3

[\(⇒ Präsentation als pdf-Datei\)](#)

Steinchen im
ersten Feld
kommen 8•8
dazu. Also
liegen im
ersten Feld
schließlich 67
Steinchen.

Übungsaufgabe:

Übersetzen Sie
schriftlich:

$87 = \underline{\hspace{2cm}}$
 2

[→Lösung](#)

$464 = \underline{\hspace{2cm}}$
 16

[→Lösung](#)

$5670_8 = \underline{\hspace{2cm}}$

[→Lösung](#)

$10110111_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
 16

[→Lösung](#)

Die Addition

*Hohn und Spott über alle, die die Addition von
Stellenwertzahlen nicht am Abakus erklären!*

(Bewegen Sie die Maus über die Aufgabe, um das Ergebnis zu sehen.)

$8 \text{ A } F_{16} + 9 \text{ 5 } 2_{16} = ?$



$4 \text{ 7 } ; 5 \text{ 3 }_{6 \times 10} + 3 \text{ 2 } ; 0 \text{ 9 }_{6 \times 10} = ?$



(Zur Erinnerung: Im 6×10er-System werden abwechselnd
10er- und 6er-Bündel gebildet.)

Arithmetischer Beweis der Summenformel zur [Weizenkornlegende](#):

Die Gesamtzahl der Körner auf dem Schachbrett lässt sich nun doch einfach berechnen – aber im Zweier- und nicht im Zehnersystem! Denn wir können die Summe $2^0+2^1+2^2+\dots+2^{63}$ als Wert einer Zahl im Zweiersystem ansehen, was wegen der Zweier-Potenzen nahe liegt; betrachten wir dazu folgende Stellenwerttafel:

2^{63}	2^{62}	...	2^2	2^1	2^0
1	1	...	1	1	1

Die Zahl $111\dots11_2$, die im Zweiersystem aus 64 Einsen besteht, hat als Wert genau die Summe $2^0+2^1+2^2+\dots+2^{63}$.

Und was passiert, wenn wir zu dieser Zahl noch 1 addieren: $111\dots11 + 1$?

(Überlegen Sie erst selbst, ehe Sie weiterlesen.)

Durch die Addition von 1 liegen im Einer-Feld 2 Plättchen, die nach der 2er-Regel zu bündeln sind. Dadurch erhalten wir im nächsten 2 Plättchen, die auch wieder zu bündeln sind usw. Also erhalten wir schließlich eine Zahl mit 64 Nullen, die an der 65. Stelle eine 1 hat: $100\dots000_2$. Der Wert dieser Zahl ist 2^{64} , weshalb wir schreiben können:

$$111\dots11_2 + 1 = 2^{64}$$
$$\text{oder } 111\dots11_2 = 2^{64} - 1$$

Setzen wir in die letzte Gleichung die Summe $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{63}$ ein anstelle der Zahl $111\dots11_2$, dann erhalten wir die übliche Summenformel zur Weizenkornlegende:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

[→ Inhaltsverzeichnis](#)