

[→ Inhaltsverzeichnis](#)

Historische Zahlzeichen

Das mesopotamische 60er-System

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	30	40	50						
= 62, = 122 und = 129.									

Eine Einführung in dieses Zahlensystem bietet folgendes Arbeitsblatt, das für eine 5. Klasse gedacht ist:

http://www.wazimmer.de/matheKlasse5B_material-Dateien/Babylonische_Zahlen.pdf

Weitere Links:

- [Schulbuch „Lambacher Schweizer 5“](#)
- <http://www.labbe.de/zzebra/index.asp?themaId=559&titelId=3249>
- <http://www.spasslernen.de/geschichte/ges4.htm>
- <http://www.christoph-grandt.com/BABYLON.pdf>
- <http://de.wikipedia.org/wiki/Zahlendarstellungen>
- <http://de.wikipedia.org/wiki/Sexagesimalsystem>
- <http://www.uni-muenster.de/Medienpaedagogik/lesenswertes/mesopotamien.htm>

Die erste Null in der Geschichte

Dieses Stellenwertsystem ist ab ca. 2000 v.Chr. bei mesopotamischen Mathematikern und Astronomen in Gebrauch und kam i.W. bis ca. 300 v.Chr. ohne ein entsprechendes Zeichen für 0 aus. Auf einer Tontafel aus der Zeit um

1500 v.Chr. (Ifrah, S.417) findet sich die Aussage, das Quadrat von sei (in moderner

Notation: $2;27^2 = 6;9$).

Übersetzt ins Zehnersystem lauten die beiden Zahlen 147 und 369. Aber sicher gilt $147^2 \neq 369$.

Andererseits ist $147^2 = 21609$ und $21609 = 6 \times 60^2 + 9$. Also gilt $2;27^2 = 6;0;9$. (Übrigens: Wie hat man das damals wohl berechnet?)

Etwa ab 300 v.Chr. wird das Zeichen im Sinne unserer 0 bei der Darstellung von Stellenwertzahlen verwendet – vor allem in der Astronomie.

Zählsteine (Calculi) – das erste „Bündelmaterial“ in der Geschichte

Die Keilschriftzahlen gehen zurück auf ein haptisches Zahlensystem, das zwischen 3500 und 3300 v.Chr. in

Mesopotamien gebräuchlich war. Es bestand aus unterschiedlich geformten Tonsteinchen (Calculi, Tokens) mit unterschiedlichem Zahlenwert.

Zum Gebrauch dieser Calculi sagt Ifrah (S.190 ff.):

„Ein Hirte hat von einem reichen Viehzüchter der Gegend den Auftrag bekommen, eine Herde mit 299 Schafen für mehrere Monate auf die Weide zu treiben. Vor dem Aufbruch der Herde wird sie in Anwesenheit des Hirten und seines Auftraggebers von einem städtischen Buchhalter, der Verwalter der Vermögenswerte des Besitzers ist, gezählt. Nachdem die Anzahl der Tiere festgestellt ist, formt der Buchhalter um seinen Daumen herum eine hohle Lehmbulle, eine Kugel mit einem Durchmesser von ca. 7 cm, also von der Größe eines Tennisballs. Durch das Loch, das der Daumen in der Kugel hinterlassen hat, werden zwei Scheiben aus gebranntem Ton, die je 100 Hammel darstellen, neun Kugeln, die für je zehn Tiere stehen, und neun Stäbchen, für je ein Tier, in das Innere gesteckt.[...] Nun schließt ein Beamter das Loch und versiegelt die Bulle mit dem Siegel des Eigentümers der Herde. Dadurch erhält das Dokument offizielle Gültigkeit; jede Möglichkeit einer Fälschung ist von nun an ausgeschlossen. Nachdem der Lehm getrocknet ist, wird die Bulle im Archiv aufbewahrt; Bulle und calculi stellen damit die Garantie für den Hirten und für den Herdenbesitzer dar, daß die Herde gezählt wurde, so daß bei der Rückkehr des Hirten festgestellt werden kann, ob die Herde vollständig ist. Dazu wird der Buchhalter die Bulle zerschlagen und mit Hilfe der calculi die Zahl der Schafe überprüfen.“

Im weiteren Verlauf der Geschichte wurden solche Zählsteinchen ersetzt durch entsprechende bildliche Darstellungen auf Lehmtafeln. Und aus letzteren entstand die o.g. Keilschrift. Im Unterschied zu dieser Keilschrift bildeten die Zählsteine und auch die darauf bezogenen Schreibsymbole aber kein Stellenwertsystem sondern nur ein Additionssystem wie etwa die römischen Zahlen.

Zahlworte		Calculi	ZIFFERN		
			archaische	in Keilschrift	
1	gesch oder disch				1
10	u				10
60	gesch				60
600	gesch-u 60×10	 60×10	 60×10	 60×10	60×10
3 600	schar				60^2
36 000	schar-u $3\,600 \times 10$	 $3\,600 \times 10$	 $3\,600 \times 10$	 $3\,600 \times 10$	$60^2 \times 10$
216 000	schargal	?	?		60^3

Abb. 193: Die sumerischen Ziffernsysteme.

G. Ifrah: "Universalgeschichte der Zahlen", 1991, S. 263

[⇒ Bilder von Zählsteinen](#)

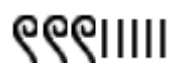
Bemerkenswert ist die Analogie zu didaktischem Bündelmaterial (wie dem von Dienes), das beim Vermitteln unserer Zahlschrift verwendet wird:



Die Hieroglyphen-Zahlschrift des alten Ägypten

Das Zahlensystem der Ägypter, wie es ab 3000 v.Chr. bezeugt ist, ist so wie das römische rein additiv. Es bestand aus den folgenden Ziffern:

Zahl	1	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000
Hieroglyphe		∩	9	⋈	∩	9	⋈



bedeutete also 305.

Links:

- [Schulbuch „Lambacher Schweizer 5“](#)
- <http://www.labbe.de/zzzebra/index.asp?themaId=559&titelId=3248>
- http://de.wikipedia.org/wiki/Ägyptische_Zahlen

Ägyptische Multiplikation

Zur Multiplikation zweier Zahlen verwendeten die Ägypter ein Verfahren, das auch gut in einem Nicht-Stellenwertsystem funktioniert. Es ist das gleiche Verfahren, das man heute noch unter dem Namen Russische Bauernmultiplikation oder eben Ägyptische oder Abessinische Multiplikation kennt. Es eignet sich außerdem sehr gut für Rechnungen im 2er-System, weshalb dieses Verfahren heutzutage durch die Computertechnologie zu besonderer Bedeutung kam.

Hier eine Beschreibung des Verfahrens aus [„YOUKA 2007, Der Jugendkalender aus deiner Apotheke“](#)

Beispiel:

1. Man schreibt die beiden zu multiplizierenden Zahlen nebeneinander.
2. Auf der linken Seite werden die Zahlen jeweils halbiert (Reste abgerundet) und die Ergebnisse untereinander geschrieben, bis man zur 1 gelangt.
3. Auf der rechten Seite werden die Zahlen verdoppelt und untereinander geschrieben.
4. Die rechts stehenden (verdoppelten) Zahlen werden gestrichen, wenn die jeweils links

35 · 89	
35	89
17	178
8	256
4	712
2	4424
1	2848
Ergebnis	3115

stehende Zahl gerade ist.

5. Die Summe der nicht gestrichenen rechts stehenden Zahlen ergibt das gesuchte Produkt.

Erläuterung des Beispiels:

[\(⇒ Präsentation als pdf-Datei\)](#)

Die römische Zahlschrift

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1000
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	L	C	D	M

Unser Interesse an der Zahlschrift der Römer ist nicht nur historischer Art. Wegen ihrer Verwendung auf Urkunden und Gebäuden sowie gelegentlich bis heute im Alltag (Uhren-Ziffernblatt, Seitenzahlen etc.) ist diese Zahlschrift fester Bestandteil des Unterrichts in der Primarstufe. Dort gelten folgende Bildungsregeln:

- Es dürfen höchstens drei gleiche Ziffern nebeneinander stehen, und die Ziffern V, L und D werden nicht mehrfach notiert.
- Die Ziffern werden i.Allg. von links nach rechts mit fallender Wertigkeit notiert und ihre Werte werden addiert. Eine Ausnahme bilden die folgenden Ziffernpaare – und nur diese: IV, IX, XL, XC, CD, CM. Ihr Wert wird durch Subtraktion bestimmt.

[⇒ Schulbuch „Lambacher Schweizer 5“](#)

Historisch erfolgte die Bildung allerdings oft nach anderen Regeln. Und auch heute noch steht auf Uhren-Ziffernblättern nicht IV sondern IIII.

Unabhängig von den jeweiligen Bildungsregeln ist die römische Zahlschrift ein Additionssystem, obgleich der Wert mancher Zahlen durch Subtraktion ermittelt wird. Denn Mit „Addition“ ist hier gemeint, dass nur die „Grundrechenarten erster Stufe“ (Addition, Subtraktion) gebraucht werden, im Unterschied zu den Stellenwertsystemen, die auch die Multiplikation und Potenzbildung benötigen (Grundrechenarten zweiter und dritter Stufe).

Zwei Missverständnisse:

- Die Römer konnten auch größere Zahlen darstellen (mit höheren Zehnerpotenzen als 1000)!

5.000	10.000	50.000	100.000
D oder IↃ	Ↄ oder ccIↃ	IↃↃ	cccIↃↃ

Für die Zahlen 500 und 1.000 waren außer D bzw. M auch die Zeichen IↃ bzw. cIↃ (oder Ↄ) in Gebrauch. Die prinzipielle Schwierigkeit der Notation immer größerer Zahlen war damit aber nicht gelöst. Und so entwickelte man weitere Notationsformen wie etwa eingerahmte Zeichen XII (=1.200.000).

- Die Römer rechneten nicht mit ihrer Zahlschrift sondern mit einem Abakus (Rechentafel)! Daran wurden die Zahlen in einem Stellenwertsystem dargestellt, das mit dem heute üblichen Zehnersystem eng verwandt ist.

Umrechner für römische Zahlen:

- www.mathepower.com/roemisch.php
- www.umrechnung.org/roemische-zahlen-umrechnen/umrechnung-roemische-ziffern.htm

Zum Weiterlesen:

- www.mathematische-basteleien.de/roemisch.htm
- <http://matheuropa.lfs-koeln.de/roemzahlen/index.htm>
- www.labbe.de/zzebra/index.asp?themaId=559&titelId=3253
- http://de.wikipedia.org/wiki/Römische_Zahlschrift

Das 20er-System der Maya

Die Maya entwickelten im 3.-9. Jh. n.Chr. eine Zahlschrift, die aus Punkten (Wert 1) und Strichen (Wert 5) bestand. Damit stellten sie rein additiv die Zahlen von 1 bis 19 dar:

0	1	2	3	4
	•	••	•••	••••
5	6	7	8	9
	• 	•• 	••• 	•••• 
10	11	12	13	14
	• 	•• 	••• 	•••• 
15	16	17	18	19
	• 	•• 	••• 	•••• 

Ab 20=  verwendeten sie ein Stellenwertsystem, dessen Stellen der Größe nach von unten nach oben angeordnet waren (100= )

Es war jedoch kein reines 20er-System, da der Wert der dritten Stelle nicht 20² (=20×20) war sondern 18×20. Danach ging es wieder regulär weiter, d.h. die vierte Stelle hatte den Wert 18×20² und die fünfte Stelle den Wert

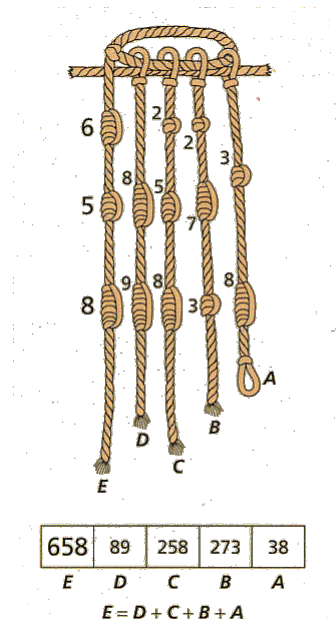
18×20^3 .

Die Zahl  hatte somit den Wert 360 und nicht 400 (wie man häufig liest).

Zum Weiterlesen:

- <http://de.wikipedia.org/wiki/Maya-Zahlschrift>
- „Mathematik – Neue Wege 5“
- www.labbe.de/zzzebra/index.asp?themaId=559&titelId=3254

Die Knotenschnüre der Inka



Die Inka verwendeten bis ins 17. Jh. eine sonderbare Zahlschrift: Sie formten auf Schnüren in regelmäßigen Abständen Knoten. Jede solche Knotenschnur stellte eine Zahl im dekadischen Stellenwertsystem dar. Wurde die Summe mehrerer Zahlen gebildet, so verband man die entsprechenden Schnüre durch eine weitere Schnur, auf der die Summe dargestellt war. Diese Knotenschrift heißt Quipu. Sie diente der Buchhaltung und hatte den Vorteil, dass nicht nur Ergebnisse sondern auch zugrunde liegende Daten und Rechnungen archiviert wurden.

American Museum of Natural History,
New York, B 8713;
nach: Ifrah, "Universalgeschichte der
Zahlen", 1991, S.123

Die indisch-arabischen Ziffern

Unser Ziffern von 1 bis 9 gehen zurück auf die alte indische Brahmi-Schrift:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
—	=	≡	+	h	φ	?	↵	?

Aber erst seit dem 8. Jh. n.Chr. ist die Verwendung dieser Ziffern als Stellenwertsystem bezeugt – zusammen mit einem Kreis oder Punkt als Ziffer Null. Der älteste bisher bekannte Nachweis der Verwendung speziell eines solchen Zeichens für Null in einer Stellenwertzahl ist eine Inschrift in Kambodscha aus dem Jahr 683 (K. 127), wo das Jahr 605 angegeben ist (= 683/684 nach unserer Zeitrechnung).

In dem großen arabischen Reich, das nach dem Tod Mohammeds entstanden war, wurde das indische Zahlensystem schnell aufgenommen und verbreitete sich rasch. In dieser Kultur war allgemein das Interesse an Philosophie, Mathematik und Astronomie sehr groß, und wir verdanken heute unsere Kenntnisse der antiken Schriften größtenteils der Überlieferung durch die damalige arabische Kultur. Unsere Wörter „Algebra“ und Algorithmus“ z.B. zeugen noch von diesem Einfluss.

Erst ab dem 12. Jh. übernahm man auch in Europa das indische Zahlensystem, vermittelt durch die Araber. Von herausragender Bedeutung war dabei Leonardo von Pisa (ca. 1170 – ca. 1250) mit seinem Buch „Liber Abaci“.

- http://de.wikipedia.org/wiki/Indische_Ziffern
- <http://de.wikipedia.org/wiki/Null>
- http://de.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci
- [Der mathematische Monatskalender Februar 2009: Mohammed Al-Khwarizmi](#)
- <http://de.wikipedia.org/wiki/Al-Chwarizmi>

Was ist ein Stellenwertsystem?

Zahlen in einem Stellenwertsystem sind typischerweise Folgen von Ziffern, die je nach ihrer Position innerhalb der Folge unterschiedlich gewichtet werden, indem man sie mit dem Wert ihrer jeweiligen Stelle multipliziert. So wird z.B. die Ziffer 1 in 123 anders gewichtet als in 321. Und das gilt für alle Ziffern und Zahlen eines Stellenwertsystems. Dadurch ist es möglich, mit einem begrenzten Vorrat an Ziffern jede gewünschte natürliche Zahl darzustellen. Dagegen werden in additiven Zahlensystemen wie der römischen oder der ägyptischen Zahlenschrift für größere Zahlen immer weitere Zeichen oder Schreibweisen benötigt. Zwar kann in der römischen Zahlenschrift das Zeichen I je nach Positionierung bezüglich V oder X für +1 oder -1 stehen, aber für 10, 100 und 1000 etc. werden doch weitere Zeichen benötigt.

Allgemein können wir Stellenwertsysteme zu einer Basis b wie folgt beschreiben:

Ein Stellenwertsystem zur Basis b (für $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$) besteht aus

- der Grundmenge $Z = \{0, 1, \dots, b-1\}$ von b Zahlen aus $\mathbb{N}$, den sogenannten *Ziffern*. (Insbesondere ist wegen $b \geq 2$ stets 0 und 1 in der Grundmenge enthalten.)
- und aus Ziffernfolgen $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ ($n \geq 0$), für die gilt: $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 = \sum_{i=0}^n a_i b^i$.

b^i heißt *Stellenwert* der Ziffer a_i in der Ziffernfolge $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$.

(Zur Vermeidung von Missverständnissen notiert man bei Ziffernfolgen aus einem Nicht-Dezimalsystem die zugrundeliegende Basis etwa als Index, also $(z_n z_{n-1} \dots z_2 z_1 z_0)_b$ statt $z_n z_{n-1} \dots z_2 z_1 z_0$. So ist z.B.

$$100_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0.)$$

Die zweistellige Ziffernfolge 10 hat stets den Wert der Basis b , da $10_b = 1 \cdot b^1 + 0 \cdot b^0$ ist. Bei Stellenwertsystemen mit Basen $b > 10$ werden mehr Ziffern benötigt als beim Dezimalsystem. In diesen Fällen werden heutzutage oft Buchstaben des Alphabets hinzugenommen (Hexadezimalsystem: 0, 1, 2, ..., 9, A, B, C, D, E, F). Oder die Ziffern, deren Wert 9 übersteigt, werden als eingeklammerte Zahlen des Dezimalsystems notiert (wieder Hexadezimalsystem: 0, 1, 2, ..., 9, (10), (11), (12), (13), (14), (15)). In leicht abgewandelter Form findet sich diese Schreibweise im 60er-System, z.B. bei Zeitangaben; statt Klammern um die Ziffern zu setzen werden diese durch Trennzeichen (wie Doppelpunkt oder Semikolon) voneinander abgesetzt: $23;45 = 23 \cdot 60^1 + 45 \cdot 60^0$.

Die obige Definition lässt sich weiter verallgemeinern, indem man auch die Basis b in Abhängigkeit von der Position der Ziffern variiert. Dies trifft auf die Zahlen der Maya zu, die an der dritten Stelle nicht mit 20^2 sondern mit $20 \cdot 18$ gewichtet werden. Auch die uns geläufigen Zeitangaben in Stunden, Minuten und Sekunden bilden ein solches Stellenwertsystem nämlich mit den abwechselnden Basiszahlen 10 und 6; dazu später mehr.

Im Unterschied zur römischen oder ägyptischen Zahlenschrift erfüllt das Zahlensystem der Maya und auch das mesopotamische 60er-System, die geforderten Kriterien für ein Stellenwertsystem. Die Zahlen der Maya von 0 bis 19 sind die Ziffern ihres Stellenwertsystems, dessen Basis $b=20$ ist – wenn man von der Abweichung an der 3. Stelle absieht. Entsprechend bilden in der mesopotamischen Keilschrift die Zahlen von 1 bis 59 zusammen mit dem Zeichen für die leere Stelle die Ziffern eines Stellenwertsystems zur Basis 60.

Bemerkung: Üblicherweise werden die indisch-arabischen Ziffern und Ziffernfolgen des herkömmlichen Zehnersystems nicht als natürliche Zahlen bezeichnet sondern als **Zahldarstellungen**. Doch wegen des

Standardcharakters dieser Darstellung und wegen ihrer eindeutigen Beziehung zu den natürlichen Zahlen, werden sie i. Allg. selbst wie natürliche Zahlen verwendet (z.B. „die Zahl 1“).

Da dies keine mathematischen Probleme bereitet, sondern vielmehr zur Vereinfachung der Ausdrucksweise beiträgt, wollen wir allgemein jede Zahldarstellung eine Zahl nennen (man spricht ja z.B. auch nicht von römischen Zahldarstellungen sondern von römischen Zahlen). Hinfällig wäre damit auch die Unterscheidung zwischen Ziffer und Zahl oder Ziffernwert.

[→ Inhaltsverzeichnis](#)